

RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				



RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI

FAKULTATYVINIS KURSAS IX—X KL.

Sudarė O. BOKOVNEVAS, V. FIRSOVAS, S. ŠVARCBURDAS



KAUNAS ŠVIESA 1983

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ
факультативный курс, IX кл.
Авторы: *И. Н. Антипов, Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, А. Г. Мордкович*
Составители: *О. А. Боковнев, В. В. Фирсов, С. И. Шварцбурд*
Москва, «Просвещение», 1979

Vertė JUOZAS MAČYS

Originalą rekomendavo TSRS švietimo ministerijos Vyriausioji mokyklų valdyba

Ri-107 **Rinktiniai** matematikos klausimai: Fakultatyv. kursas IX—X kl. / I. Antipovas, N. Vilenkinas, O. Ivaševas-Musatovas ir kt.; Sudarė O. Bokovnevas ir kt. — K.: Šviesa, 1983. — 184 p., iliustr.

Aut. nurodyti kn. metrikoje.

Knygoje pateikiama IX—X klasės matematikos fakultatyvinio kurso teorinė medžiaga ir pratimai.

BBK 22.1z72
51(075)

R $\frac{\mathbf{4306020400-265}}{\mathbf{M\,853(10)-83}}$ 132—83

PRATARMĖ

Ši knyga yra fakultatyvinio kurso „Rinktiniai matematikos klausimai“ mokymo priemonė vidurinės mokyklos IX—X klasei. Pereinant prie naujųjų programų, šis kursas įvedamas į mokyklą vietoj anksčiau buvusio kurso „Papildomieji sisteminio matematikos kurso skyriai ir klausimai“. Priemonės turinys iš esmės atitinka fakultatyvinio kurso programą, Švietimo ministerijos patvirtintą 1977 m. Į šią priemonę neįtraukta erdvinių figūrų vaizdavimo plokštumoje medžiaga — ji bus išleista atskirai. Be to, knygoje yra du papildomi skyriai, skirti matematinės indukcijos metodo ir kombinatorikos elementų išdėstymui. Tai susiję su atitinkamų klausimų išbraukimu iš pagrindinio matematikos kurso. Dėl to fakultatyvo programa turi būti natūraliai pakoreguota, perskirstytos pagrindinės ir papildomosios temos.

Idėjiniu ir metodiniu atžvilgiu ši priemonė tęsia analogišką knygą, skirtą VII—VIII klasės mokiniams. Tačiau šių priemonių turinys nepriklausomas, todėl galima pradėti fakultatyvinius užsiėmimus IX klasėje.

Kaip nurodyta VII—VIII klasės priemonės pratarmėje, „Rinktinių matematikos klausimų“ kurso tikslas yra skatinti mokinių domėjimąsi matematika, padėti ją pamėgti.

Kurso programą sudaro nepriklausomi skyriai, todėl bet kurią fakultatyvo temą galima nagrinėti, nesusipažinus su ankstesnių metų temomis. Temų pasirinkimas priklauso nuo fakultatyvinės grupės mokytojo ar dėstytojo. Žinoma, jis turi atsižvelgti į savo ir mokinių galimybes. Be to, fakultatyvo programoje temos skirstomos į pagrindines (privalomąsias), kurias rekomenduojama nagrinėti pirmiausia, ir papildomas temas, kurias mokytojas pasirenka savo nuožiūra. Todėl programoje yra daugiau temų negu reikia, t. y. kai kurių temų (iš papildomųjų) galima nenagrinėti.

Kurso programa apima svarbiausius matematikos klausimus, pagilinančius pagrindines bendrojo matematikos kurso kryptis. Kiekviena fakultatyvo tema tiesiogiai siejasi su pagrindinio kurso medžiaga. Be to, šia programa stengiamasi: a) išnagrinėti medžiagą taip, kad mokiniui būtų aiški jos matematinė reikšmė, tam tikras jos užbaigtumas; b) parodyti mokyklinės matematikos tiesioginį ryšį su tikruoju mokslu ir jo taikymu. Turima galvoje, kad per užsiėmimus bus apžvelgta nagrinėjamų metodų, koncepcijų ir idėjų atsiradimo ir vystymosi istorija, jų reikšmė matematikai ir kitiems mokslams bei praktinės veiklos sritims.

Kurso medžiaga nedubliuoja aukštųjų mokyklų programų, bet leidžia iš bendresnių pozicijų pažvelgti į mokyklinę matematiką ir suvokti matematikos dalyko ir metodo vienybę. Todėl labai

svarbu ne mokyti tų specialių metodų, būdų ir įgūdžių, kurių mokoma aukštosiose mokyklose, o parodyti mokiniams, kaip iš mokyklinio matematikos kurso medžiagos kyla bendros koncepcijos, vertingos teorijai ir jos pritaikymui.

Svarbią vietą matematikos fakultatyviniuose užsiėmimuose turi užimti uždavinių sprendimas. Turima galvoje, kad, mokantis kiekvienos temos, bus sprendžiama nemaža uždavinių. Tokių uždavinių yra ir šioje knygoje. Beje, tarp jų nemaža beveik tradicinių mokyklinių uždavinių.

Be to, fakultatyvo programoje numatytas laikas spręsti sunkiems bendrojo matematikos kurso uždaviniams. Taigi bendrojo matematikos kurso uždavinius numatoma spręsti ne tik einant fakultatyvo temas, bet ir specialiai uždavinių sprendimui ir aptarimui skirtuose užsiėmimuose.

Atsižvelgiant į tai, kad leidyklos „Prosveščenije" serijose išeina algebros ir geometrijos uždavinynų, o ir šiaip nemaža literatūros skirta uždaviniams, į šią priemonę neįtrauktas specialus sunkių uždavinių skyrius. Manome, kad iniciatyvos turi imtis mokytojas, kuris pažįsta savo mokinius, žino jų matematinį išprusimą ir interesų ratą.

Atsiliepimus ir pasiūlymus prašome siųsti adresu: Москва, 129846, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Издательство «Просвещение», редакция математики.

MATEMATINĖS INDUKCIJOS METODAS

1. Dedukcija ir indukcija. Vienas iš matematikos ir tokių mokslų, kaip teorinė mechanika, teorinė fizika, matematinė lingvistika, skiriamųjų bruožų yra dedukcinis teorijos plėtojimas. Dedukcinis samprotavimas — tai samprotavimas einant nuo bendra prie atskira, t. y. samprotavimas, kurio pradinis momentas yra bendras teiginys, o baigiamasis momentas — atskira išvada.

Matematikoje taikome dedukciją, kai samprotaujame, pavyzdžiui, taip: žinome, kad *bet kuris* lygiašonis trikampis turi simetrijos ašį; kadangi *šis* trikampis yra lygiašonis, tai jis turi simetrijos ašį. Žodis *dedukcija* lietuviškai reiškia išvedimą.

Dedukcija nėra vienintelis mokslinio mąstymo būdas. Fizikoje, chemijoje, biologijoje dažnai apeliuojama į stebėjimą ir bandymą, samprotaujama remiantis indukcija. Žodis *indukcija* lietuviškai reiškia įvedimą, o indukcinėmis vadinamos išvados, padarytos iš stebėjimo ir bandymo, t. y. nagrinėjant atskirus atvejus ir pastebėtus dėsnius taikant bendrajam atvejui.

Indukcinis samprotavimas labai svarbus eksperimentiniams mokslams. Juo išvedami teiginiai, kuriais remiamasi, deduktyviai samprotaujant toliau. Matematikoje indukcija dažnai padeda parinkti teoremų formuluotes, o kartais ir nuspėti įrodymo būdus.

2. Pilnoji ir nepilnoji indukcija. Sakykime, reikia įrodyti, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais a ir b teisinga nelygybė

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \qquad (1)$$

Čia galimi 4 atvejai: 1) $a\geqslant0$, $b\geqslant0$; 2) $a<0$, $b\geqslant0$; 3) $a\geqslant0$, $b<0$; 4) $a<0$, $b<0$.

Jeigu $a\geqslant0$, $b\geqslant0$, tai $|a+b|=a+b$, $|a|=a$, $|b|=b$, todėl (1) nelygybė virsta tokia: $a+b\leqslant a+b$. Ši nelygybė teisinga.

Jeigu $a<0$, $b\geqslant0$, tai $a+b$ yra tarp a ir b, $a\leqslant a+b<b$, todėl $|a+b|$ ne didesnis už didesnį iš skaičių $|a|$, $|b|$. Tačiau tada $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

Analogiškai yra tuo atveju, kai $a\geqslant0$, $b<0$.

Pagaliau, jei $a<0$, $b<0$, tai $|a+b|=-a-b$, $|a|=-a$, $|b|=-b$, ir (1) nelygybė virsta tokia: $-a-b\leqslant-a-b$. Ši nelygybė teisinga.

Taigi (1) nelygybė teisinga kiekvienu iš keturių galimų atvejų.

Toks išsemiančio visas galimybes baigtinio atvejų skaičiaus nagrinėjimo metodas vadinamas *pilnąja indukcija*. Matematikoje jis taikomas gana dažnai. Pavyzdžiui, įrodinėjant įbrėžtinio kampo didumo teoremą, reikia išnagrinėti tris atvejus: apskritimo centras yra vienoje iš kampo kraštinių, yra kampo viduje, yra

kampo išorėje. Įrodžius teoremą kiekvienu iš šių atvejų, ji bus įrodyta ir bendruoju atveju, nes tik šie atvejai yra galimi.

Taigi pilnoji indukcija pasireiškia tuo, kad bendrasis teiginys atskirai įrodomas kiekvienu atveju, kai galimų atvejų skaičius yra baigtinis. Nepaisant pavadinimo, pilnosios indukcijos metodas iš tikrųjų yra ne indukcinis, o dedukcinis: jį taikydami, remiamės bendraisiais logikos dėsniais, pagal kuriuos bendrąjį atvejį reikia suskaidyti į baigtinį skaičių atskirų atvejų ir kiekvieną jų nagrinėti.

Kartais bendrą rezultatą pavyksta nuspėti, išnagrinėjus ne visus, o pakankamai daug atskirų atvejų — tai vadinamoji *nepilnoji indukcija*. Nepilnąja indukcija gauta, bet tiksliai matematiškai samprotaujant neįrodyta išvada lieka tik hipoteze. Kitaip tariant, nepilnoji indukcija matematikoje nelaikoma griežtu įrodymo metodu; vis tik jis yra galingas euristinis metodas naujoms tiesoms atrasti.

Pavyzdžiui, nagrinėdami lyginius skaičius, didesnius už 2, pastebime, kad kiekvienas jų yra dviejų pirminių skaičių suma: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$, $14=7+7$, $16=3+13$, $18=5+13$, $20=3+17$ ir t. t. Tai leidžia iškelti hipotezę, kad bet kuris lyginis skaičius, didesnis už 2, yra dviejų pirminių skaičių suma. Nepaisant daugelio įžymių matematikų pastangų, šis *Goldbacho hipoteze* vadinamas teiginys (pagal XVIII a. vokiečių matematiko Kristijano Goldbacho, Peterburgo Mokslų Akademijos nario, vardą) iki šiol nėra įrodytas bendruoju atveju. Geriausią šios krypties rezultatą gavo tarybinis matematikas akademikas I. Vinogradovas. Jis įrodė, kad kiekvienas pakankamai didelis lyginis skaičius yra keturių pirminių skaičių suma.

Tačiau dažnai atsitinka ir taip, kad, remiantis pastebėtu dėsningumu, galima suformuluoti hipotezę, kurią paskui pavyksta įrodyti. Sakykime, reikia rasti pirmųjų n nelyginių skaičių sumą. Išnagrinėkime kelis atvejus:

$$1=1,$$
$$1+3=4,$$
$$1+3+5=9,$$
$$1+3+5+7=16,$$
$$1+3+5+7+9=25.$$

Pastebime, kad $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$, $16=4^2$, $25=5^2$. Išnagrinėjus šiuos atskirus atvejus, peršasi tokia bendra išvada:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2, \qquad (2)$$

t. y. *n pirmųjų nelyginių skaičių suma lygi* n^2. 3 skyrelyje susipažinsime su metodu, kuriuo remiantis galima įrodyti, kad (2) formulė teisinga.

Perspėsime, kad indukciniais samprotavimais galima padaryti klaidingas išvadas. Pavyzdžiui, XVII a. prancūzų matematikas Pjeras Ferma įsitikinęs, kad reiškinio $2^{2^n}+1$ reikšmės, kai $n=$

$=1, 2, 3, 4$, yra pirminiai skaičiai, nusprendė, jog visos to reiškinio reikšmės, atitinkančios natūrines n reikšmes, yra pirminiai skaičiai. Tačiau garsus XVIII a. matematikas Leonardas Oileris (šveicarų kilmės, gyvenęs ir dirbęs Peterburge) įrodė, kad skaičius $2^{32}+1$ (čia $n=5$) nėra pirminis, nes dalijasi iš 641.

Pateiksime nuostabų indukcija gautos klaidingos išvados pavyzdį. Nagrinėjame, ar egzistuoja natūrinis skaičius n, kurį atitinkanti reiškinio $991n^2+1$ reikšmė yra tikslusis kvadratas (natūrinio skaičiaus kvadratas). Atskirais atvejais, kai $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, gauname skaičius, kurie nėra tikslieji kvadratai. Jei daug metų tik tiek teveiktume, kad vieną po kito tikrintume natūrinius skaičius, tai gautume skaičius, kurie nėra tikslieji kvadratai. Visiškai natūralu spėti, kad nėra natūrinio skaičiaus, kurį atitinkanti reiškinio $991n^2+1$ reikšmė būtų tikslusis kvadratas. Ir vis dėlto tai netiesa: egzistuoja toks 29-ženklis skaičius m, kad $991n^2+1$ yra tikslusis kvadratas.

Taigi nepilnoji indukcija gali apgauti. Tačiau palyginti dažnai ji padeda nuspėti teisingą rezultatą.

Pratimai

1. $S_n=-1+2-3+4-5+\ldots(-1)^n n$. Apskaičiavę S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, atspėkite, kam bus lygi suma S_{316}, S_{327}.

2. Ar teisingas teiginys: su bet kuriuo natūriniu n n^2+n+17 yra pirminis skaičius? Patikrinkite, kai $n=1, 2, 3, \ldots, 15, 16$.

3. Matematinės indukcijos metodas. Pilnoji indukcija matematikoje taikoma retai. Daugelis įdomių matematinių teiginių apima begalinę aibę atskirų atvejų, o patikrinti be galo daug atvejų žmogus negali (tokie yra, pavyzdžiui, teiginiai, apimantys visus natūrinius skaičius). O nepilnoji indukcija, kaip matėme, gali duoti klaidingą rezultatą.

Daugeliu atvejų šie sunkumai nugalimi ypatingu samprotavimo metodu, vadinamu *matematinės indukcijos metodu.* Jo esmė tokia.

Sakysime, reikia įrodyti, kad teiginys yra teisingas su bet kuriuo natūriniu skaičiumi n (pavyzdžiui, reikia įrodyti, kad n pirmųjų nelyginių skaičių suma lygi n^2). Tiesiogiai patikrinti šį teiginį kiekvienai n reikšmei neįmanoma, nes natūrinių skaičių aibė yra begalinė. Įrodinėjant šį teiginį, iš pradžių tikrinama, ar jis teisingas, kai $n=1$. Po to įrodoma: kad ir koks būtų natūrinis skaičius k, iš to teiginio teisingumo, kai $n=k$, išplaukia jo teisingumas, kai $n=k+1$. Tada teiginys laikomas įrodytu su visais $n \in \mathbf{N}$. Iš tikrųjų, kadangi teiginys teisingas, kai $n=1$, tai jis teisingas ir su sekančiu skaičiumi $n=1+1=2$. Kadangi jis teisingas, kai $n=2$, iš to išplaukia, jog jis teisingas ir su $n=2+1=3$. Iš čia savo ruožtu išplaukia, kad teiginys teisingas, kai $n=4$ ir t. t. Aišku, kad galų gale taip prieisime bet kurį na-

tūrinį skaičių n. Vadinasi, teiginys teisingas su bet kuriuo n.

Suformuluosime tokį bendrą principą.

M a t e m a t i n ė s   i n d u k c i j o s   p r i n c i p a s. Jeigu teiginys, į kurio formuluotę įeina natūrinis skaičius n, yra teisingas, kai $n=1$, ir iš jo teisingumo, kai $n=k$ ($k \in \mathbf{N}$), išplaukia, kad jis teisingas, kai $n=k+1$, tai jis teisingas su visomis natūrinėmis n reikšmėmis.

Dažnai tenka įrodinėti, kad teiginys teisingas ne su visais natūriniais skaičiais, o tik su $n \geqslant p$ (p — fiksuotas natūrinis skaičius). Šiuo atveju matematinės indukcijos principas formuluojamas taip: *jeigu teiginys teisingas su* $n=p$, *ir iš jo teisingumo, kai* $n=k$ ($k \geqslant p$), *išplaukia, kad jis teisingas, kai* $n=k+1$, *tai teiginys teisingas su bet kuriuo* $n \geqslant p$.

Matematinės indukcijos metodu įrodinėjama taip. Iš pradžių įrodomasis teiginys tikrinamas, kai $n=1$. Ši įrodymo dalis vadinama *indukcijos baze,* arba pagrindu. Jeigu teiginys teisingas, kai $n=1$, tai einama prie antrosios įrodymo dalies, vadinamos *indukcijos žingsniu.* Šioje dalyje įrodoma, jog teiginys teisingas su $n=k+1$, tarus, kad teiginys su $n=k$ teisingas (indukcijos prielaida).

1 p a v y z d y s. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad teisinga 2 skyrelio (2) lygybė, t. y. įrodysime, jog

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2. \qquad (2)$$

S p r e n d i m a s. 1) Kai $n=1$, kairiojoje pusėje yra vienas dėmuo 1, o dešinioji lygi 1^2. Todėl įrodinėjamoji lygybė virsta tokia: $1=1^2$. Tai teisinga lygybė, todėl (2) lygybė su $n=1$ teisinga.

2) Tarkime, kad (2) lygybė teisinga su $n=k$, t. y. teisinga lygybė

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2.$$

Įrodysime, kad tada (2) lygybė teisinga ir kai $n=k+1$, t. y. teisinga lygybė

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Turime:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=[1+3+5+\ldots+(2k-1)]+2k+1.$$

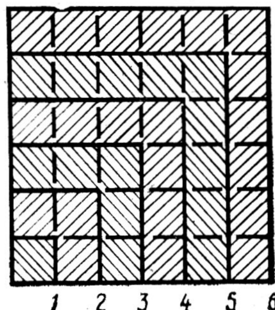
Pagal indukcijos prielaidą suma laužtiniuose skliaustuose lygi k^2. Todėl visa suma lygi $k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Taigi

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Remiantis matematinės indukcijos principu, (2) lygybė teisinga, kai n — bet koks natūrinis skaičius.

(2) lygybę žinojo jau senovės graikų geometrai, tik jie įrodinėjo ne matematinės indukcijos metodu, o geometriškai. Įrodymo idėja aiški iš 1 paveikslo: kvadratas su kraštine n yra sąjunga L raidės formos figūrų, kurių plotai lygūs 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$.



1 pav.

Pateiksime du pavyzdžius, iš kurių matyti, kad, neteisingai taikant matematinės indukcijos metodą, galima padaryti absurdiškas išvadas.

„Įrodysime", kad bet kurią baigtinę natūrinių skaičių aibę sudaro vienas kitam lygūs skaičiai.

Indukciją atliksime pagal aibės elementų skaičių. Kai $n=1$, teiginys akivaizdus — kiekvienas skaičius lygus sau. Tarkime, kad teorema įrodyta aibėms su k elementų. Nagrinėkime $(k+1)$ — elementę aibę $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. Pagal indukcijos prielaidą $a_1=a_2=\dots=a_k$. Be to, pagal tą pačią prielaidą $a_2=a_3=\dots=a_k=$ $=a_{k+1}$, todėl $a_1=a_2=a_3=\dots=a_k=a_{k+1}$. Remdamiesi matematinės indukcijos principu, tvirtiname, jog teiginys teisingas su visomis reikšmėmis $n \in \boldsymbol{N}$.

Samprotavimo klaida slypi štai kur: pereiti nuo k prie $k+1$ galima tik kai $k \geqslant 2$, o pereiti nuo $n=1$ prie $n=2$ taip samprotaujant nepavyksta.

Dar „įrodysime", jog kiekvienas natūrinis skaičius lygus po jo einančiam natūriniam skaičiui.

Tarkime, kad teiginys teisingas su $n=k$, t. y. $k=k+1$. Įrodysime, kad tada teorema teisinga ir su $n=k+1$, t. y. kad tada $k+1=k+2$. Tačiau tai pasidarys aišku, jeigu prie lygybės $k=$ $=k+1$ abiejų pusių pridėsime po 1. Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, kad teiginys teisingas su visomis n reikšmėmis.

Šio samprotavimo klaida slypi štai kur: „užmiršome" patikrinti teoremą, kai $n=1$. Kadangi su $n=1$ ji neteisinga $(1 \neq 2)$, tai matematinės indukcijos metodo čia pritaikyti nepavyksta.

Kartais vietoj matematinės indukcijos principo aksioma laikomas vienas iš tokių teiginių:

A. Jeigu natūrinių skaičių aibei priklauso skaičius 1 ir kartu su skaičiumi k jai visada priklauso ir skaičius $k+1$, tai ta aibė sutampa su visų natūrinių skaičių aibe.

B. Kiekvienoje netuščioje natūrinių skaičių aibėje yra mažiausias elementas.

Galima įrodyti, kad matematinės indukcijos principas ir kiekvienas iš teiginių A ir B yra ekvivalentūs (bet kurie du iš tų teiginių yra trečiojo išvada). Remiantis teiginiu B, nesunku įrodyti tokią teoremą, kuri išreiškia kitą matematinės indukcijos principo formuluotę.

T e o r e m a. ***Jeigu teiginys teisingas, kai $n=1$, ir iš to, kad jis teisingas su visais mažesniais už k ($k>1$) natūriniais skaičiais, išplaukia jo teisingumas su k, tai jis teisingas su visais natūriniais skaičiais.***

4. Matematinės indukcijos metodo taikymas sumavimo ir tapatybių įrodymo uždaviniams.

2 p a v y z d y s. Išvesime sumos

$$S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1)$$

formulę.

S p r e n d i m a s. $S_1=-1$,

$$S_2=-1+3=2,$$
$$S_3=-1+3-5=-3,$$
$$S_4=-1+3-5+7=4.$$

Remiantis išnagrinėtais atskirais atvejais, galima spėti, kad $S_n=(-1)^n n$. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad šis teiginys teisingas, t. y. įrodysime, kad

$$S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1)=(-1)^n\cdot n.$$

1) Lygybė teisinga, kai $n=1, 2, 3, 4$, — tai jau įrodyta anksčiau.

2) Tarkime, kad

$$S_k=-1+3-5+\ldots+(-1)^k\cdot(2k-1)=(-1)^k\cdot k,$$

ir įrodykime, jog tada

$$S_{k+1}=-1+3-5+\ldots+(-1)^k\cdot(2k-1)+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=$$
$$=(-1)^{k+1}\cdot(k+1).$$

Iš tikrųjų,

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=(-1)^k\cdot k+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=$$
$$=(-1)^{k+1}(-k+2k+1)=(-1)^{k+1}\cdot(k+1).$$

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, teigiame, kad nagrinėjamasis teiginys teisingas su bet kuriuo $n\in\boldsymbol{N}$.

3 p a v y z d y s. Išvesime sumos

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

formulę.

S p r e n d i m a s. Lygybės

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

padeda suformuluoti indukcinę prielaidą, jog

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \qquad (3)$$

Kad ši lygybė teisinga, įrodysime matematinės indukcijos metodu.

1) Teiginys teisingas, kai $n=1, 2, 3,$ — tuo jau įsitikinome anksčiau.

2) Tarkime, jog teiginys teisingas, kai $n=k$:

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Tada

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2},$$

Tačiau $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ — tai (3) lygybė, kai $n=k+1$.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, teigiame, kad įrodinėjamoji lygybė teisinga su visomis natūrinėmis n reikšmėmis.

4 pavyzdys. Įrodysime, jog

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=$$
$$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{100}.$$

Sprendimas. Suformuluokime uždavinį bendresniu atveju: įrodykime, kad su visomis natūrinėmis n reikšmėmis teisinga tapatybė

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \qquad (4)$$

1) Kai $n=1$, kairė (4) tapatybės pusė tampa $1-\frac{1}{2}$, dešinė — $\frac{1}{1+1}$. Kadangi $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ — teisinga lygybė, tai (4) tapatybė teisinga, kai $n=1$.

2) Tarkime, kad ši lygybė teisinga, kai $n=k$, t. y. kad

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Įrodysime, kad tada ji teisinga ir kai $n=k+1$, t. y. kad

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}.$$

Iš tikrųjų,

$$\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Taigi jei (4) lygybė teisinga, kai $n=k$, tai ji teisinga ir kai $n=k+1$. Remiantis matematinės indukcijos principu, (4) tapatybė įrodyta su visais $n\in\boldsymbol{N}$. Kai $n=50$, gauname uždavinio sąlygoje nurodytą lygybę.

Pratimai

3. Įrodykite, kad teisingos šios lygybės:

a) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

d) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

e) $1\cdot4+4\cdot7+7\cdot10+\ldots+(3n-2)(3n+1)=n(n+1)^2$;

f) $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

g) $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$; [1]

h) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$;

i) $(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

4. Išveskite šių sumų formules:

a) $S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

b) $S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

c) $S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2$.

---

[1] Simbolis $n!$ (skaitoma „en faktorialas“) reiškia sandaugą $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Pavyzdžiui, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

5. Išveskite šių sandaugų formules:

a) $P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right);$

b) $P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$

6. Įrodykite, kad šios lygybės yra tapatybės:

a) $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2},\ x\neq 1;$

b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-$
$-2n-1,\ x\neq 0,\ 1,\ -1;$

c) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+3}{4}+\frac{x+7}{8}+\ldots+\frac{x+2^n-1}{2^n}=\frac{(x-1)(2^n-1)}{2^n}+n.$

5. Matematinės indukcijos metodo taikymas nelygybėms įrodyti.

5 pavyzdys. Įrodysime, kad $a^n>b^n$, kai $a>b$, a, b — teigiamieji skaičiai.

Sprendimas. Kai $n=1$, teiginys akivaizdus: $a^1>b^1$. Tarkime, kad $a^k>b^k$. Įrodysime, kad tada $a^{k+1}>b^{k+1}$.

Iš tikrųjų, panariui sudauginę nelygybes $a^k>b^k$ ir $a>b$, gauname: $a^{k+1}>b^{k+1}$. Taigi, remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas su bet kuriuo $n\in\boldsymbol{N}$.

6 pavyzdys. Išspręsime nelygybę

$$2^n>2n+1 \qquad (5)$$

natūrinių skaičių aibėje.

Sprendimas. Remiantis tiesioginiu patikrinimu, skaičiai $n=1$, $n=2$ nėra (5) nelygybės sprendiniai, o reikšmės $n=3$, $n=4$, $n=5$ — šios nelygybės sprendiniai. Spėjame, kad bet kuris skaičius $n\geqslant 3$ yra (5) nelygybės sprendinys. Šį teiginį įrodysime matematinės indukcijos metodu.

Kai $n=3$, nelygybė teisinga, $2^3>2\cdot 3+1$. Tarkime, kad $2^k>$ $>2k+1$, ir įrodykime, jog tada

$$2^{k+1}>2(k+1)+1.$$

Iš tikrųjų,

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(2k+1)=(2k+3)+(2k-1)>2k+3$$

(nes $2k-1>0$ su bet kuria natūrine k reikšme).

Taigi $2^n>2n+1$ su visais $n\geqslant 3$, t. y. (5) nelygybės sprendinių aibė yra

$$\{n\in\boldsymbol{N}\mid n\geqslant 3\}.$$

7 pavyzdys. Įrodysime, kad, kai $x>-1$, teisinga nelygybė

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx. \qquad (6)$$

Sprendimas. 1) Kai $n=1$, turime teisingą nelygybę $1+x \geqslant 1+x$. 2) Tarkime, kad nelygybė $(1+x)^k \geqslant 1+kx$ teisinga, ir įrodykime, kad tada nelygybė $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$ taip pat teisinga.

Kadangi $x>-1$, tai $1+x>0$. Todėl gauname:

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k \cdot (1+x) \geqslant$$
$$\geqslant (1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x.$$

Taigi tarę, kad (6) nelygybė teisinga, kai $n=k$, įrodėme, kad ji teisinga, kai $n=k+1$. Remiantis matematinės indukcijos principu, įrodyta, kad (6) nelygybė teisinga su visais natūriniais n. Ši nelygybė vadinama *Bernulio nelygybe* (XVII a. šveicarų matematiko Jakobo Bernulio garbei).

8 pavyzdys. Įrodykime nelygybę

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}. \qquad (7)$$

Sprendimas. Reiškinys (7) nelygybės kairėje pusėje yra suma trupmenų, kurių vardikliai didėja nuo 1 iki 2^n-1. Kai $n=1$, jis virsta 1. Kadangi $1>\frac{1}{2}$ — teisinga nelygybė, tai (7) nelygybė teisinga, kai $n=1$.

Tarkime, kad

$$S_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2},$$

ir įrodykime, jog tada

$$S_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}.$$

Iš tikrųjų,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}\right)+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right).$$

Taigi $S_{k+1}=S_k+A$; čia $A=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$. Reiškinys A yra 2^k trupmenų suma, iš kurių kiekviena yra didesnė už $\frac{1}{2^{k+1}}$. Todėl $A>2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$. Kadangi $S_k>\frac{k}{2}$, $A>\frac{1}{2}$, tai iš čia gauname, jog

$$S_{k+1}=S_k+A>\frac{k+1}{2}.$$

Įrodėme, kad (7) nelygybė teisinga.

Pratimai

7. Raskite nelygybės natūrinių sprendinių aibę:

a) $2^n > n^2$; b) $2^n > n^3$.

8. Įrodykite, kad teisingos šios nelygybės:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

b) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \geqslant 2$;

c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, $n \geqslant 2$;

d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$;

e) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

f) $2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$, $n \geqslant 3$;

g) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

h) $\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}} < \frac{1 + \sqrt{4c+1}}{2}$ (n šaknų).

6. Matematinės indukcijos metodo taikymas dalumo uždaviniams. Susitarkime vietoj posakio „dalijasi be liekanos iš“ vartoti ženklą $\vdots$.

9 p a v y z d y s. Įrodykime, kad $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$.

S p r e n d i m a s. Kai $n = 1$, gauname

$$11^3 + 12^3 = (11 + 12)(11^2 - 11 \cdot 12 + 12^2) = 23 \cdot 133.$$

Tačiau $(23 \cdot 133) \vdots 133$, o tai reiškia, kad teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Tarkime, kad teiginys teisingas, kai $n = k$, t. y. kad

$$(11^{k+2} + 12^{2k+1}) \vdots 133.$$

Įrodykime, kad tuomet jis bus teisingas ir tada, kai $n = k + 1$, t. y. kad

$$(11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1}) \vdots 133, \text{ arba } (11^{k+3} + 12^{2k+3}) \vdots 133.$$

Iš tikrųjų,

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 11 \cdot 11^{k+2} + 11 \cdot 12^{2k+1} + 133 \cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}.$$

Gautoji suma dalijasi iš 133, t. y. teiginys teisingas ir tada, kai $n = k + 1$.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, teigiame, kad teiginys įrodytas su visais $n \in N$.

Matematinės indukcijos metodas padeda įrodyti vieną garsią teoremą, apie kurią dabar papasakosime. Iš pradžių pastebėkime, kad su kiekvienu $n \in N$ skaičius n^2-n yra lyginis. Iš tikrųjų, $n^2-n=n(n-1)$, o iš dviejų paeiliui einančių natūrinių skaičių $n-1$ ir n vienas būtinai lyginis, todėl jų sandauga yra lyginis skaičius. Nesunku panašiai įrodyti, jog $(n^3-n) \vdots 3$. Iš tikrųjų, $n^3-n=(n-1)n(n+1)$, o iš trijų paeiliui einančių natūrinių skaičių $n-1$, n, $n+1$ vienas būtinai dalijasi iš 3; todėl ir jų sandauga dalijasi iš 3.

Taigi

$$(n^2-n) \vdots 2,$$
$$(n^3-n) \vdots 3.$$

Galima spėti, kad $(n^m-n) \vdots m$. Tačiau jau pavyzdys $m=4$, $n=3$ paneigia šį spėjimą: 3^4-3 nesidalija iš 4. Vis dėlto su $m=5$ teiginys vėl teisingas: $(n^5-n) \vdots 5$.

Iš tikrųjų, $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Skaičius n arba dalijasi iš 5 be liekanos, arba gaunama viena iš liekanų 1, 2, 3, 4. Atitinkamai n gali būti išreikštas vienu šių būdų: 1) $n=5k$; 2) $n=5k+1$; 3) $n=5k+2$; 4) $n=5k+3$; 5) $n=5k+4$.

1) atveju $n \vdots 5$, todėl ir $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$. 2) atveju $(n-1) \vdots 5$, todėl ir $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$. 3) atveju gauname: $n^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+5$. Vadinasi, $(n^2+1) \vdots 5$, todėl ir $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$. 4) atveju $n^2+1=(5k+3)^2+1=25k^2+$ $+30k+10$. Vadinasi, $(n^2+1) \vdots 5$, todėl ir $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$. 5) atveju $(n+1) \vdots 5$, todėl ir $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$.

Taigi pilnosios indukcijos metodu įrodėme, kad $(n^5-n) \vdots 5$ su visais $n \in N$.

Pastebime, jog skaičiai 2, 3, 5 — pirminiai. Tuo remiantis, galima patikslinti hipotezę: *jei p — pirminis skaičius, tai n^p-n su bet kuriuo $n \in N$ dalijasi iš p.* Šis teiginys vadinamas *mažąja Ferma teorema.* Jis įrodomas matematinės indukcijos metodu, taikant Niutono binomo formulę (žr. „Kombinatorikos pradmenis").

Pratimai

9. Įrodykite:

a) $(6^{2n}-1) \vdots 35$;
b) $(4^n+15n-1) \vdots 9$;
c) $(2^{5n+3}+5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$;
d) $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 57$;
e) $(2^{n+5} \cdot 3^{4n}+5^{3n+1}) \vdots 37$;
f) $(3^{2n+3}-24n+37) \vdots 64$;
g) $(2^{n+2} \cdot 3^n+5n-4) \vdots 25$.

7. Matematinės indukcijos metodo taikymas, tiriant skaičių sekų savybes. Aritmetinė ir geometrinė progresija yra papras-

čiausi pavyzdžiai sekų, kurioms tirti sėkmingai taikomas matematinės indukcijos metodas. Progresijos apibrėžiamos rekurentinėmis lygybėmis, t. y. lygybėmis, iš kurių galima rasti sekos narį, žinant vieną ar keletą jos ankstesnių narių. Aritmetinė progresija apibrėžiama rekurentine lygybe $a_{n+1}=a_n+d$, o geometrinė progresija — rekurentine lygybe $b_{n+1}=b_n\cdot q$ $(b_1\neq 0,\ q\neq 0)$. Kitaip tariant, pačiame progresijų apibrėžime yra perėjimas nuo n prie $n+1$. Todėl daugelį progresijų formulių patogu įrodinėti matematinės indukcijos metodu.

Pavyzdžiui, išveskime aritmetinės progresijos n-tojo nario formulę. Pastebime, kad $a_2=a_1+d$, $a_3=a_2+d=a_1+2d$, $a_4=a_1+3d$. Tuo remiantis, galima spėti, kad su su kiekvienu natūriniu skaičiumi n teisinga lygybė $a_n=a_1+d(n-1)$. Įrodysime ją matematinės indukcijos metodu.

Kai $n=1$, ji teisinga: $a_1=a_1+d\cdot(1-1)$. Tarkime, kad lygybė teisinga su $n=k$, t. y. kad $a_k=a_1+d\cdot(k-1)$, ir įrodykime, kad tada ji teisinga su $n=k+1$, t. y. kad $a_{k+1}=a_1+dk$.

Iš tikrųjų, turime: $a_{k+1}=a_k+d=a_1+d(k-1)+d=a_1+dk$.

Remiantis matematinės indukcijos principu, lygybė teisinga su visais $n\in\mathbf{N}$.

Analogiškai įrodoma geometrinės progresijos n-tojo nario formulė $b_n=b_1q^{n-1}$ (išvesti šią formulę paliekame skaitytojui).

Dar parodysime, kaip matematinės indukcijos metodu išvedama geometrinės progresijos $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ pirmųjų n narių sumos $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ formulė.

Įrodysime, kad su $q\neq 1$

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}. \qquad (8)$$

Jei $n=1$, tai $S_1=b_1$. Kita vertus, $\frac{b_1(q^1-1)}{q-1}=b_1$. Vadinasi, (8) lygybė teisinga, kai $n=1$.

Tarkime, kad $S_k=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}$ ir įrodykime, kad tada teisinga lygybė

$$S_{k+1}=\frac{b_1(q^{k+1}-1)}{q-1}.$$

Iš tikrųjų,

$$S_{k+1}=S_k+b_{k+1}=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}+b_1q^k=$$

$$=\frac{b_1q^k-b_1+b_1q^{k+1}-b_1q^k}{q-1}=\frac{b_1(q^{k+1}-1)}{q-1}.$$

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, kad (8) lygybė teisinga su visais $n\in\mathbf{N}$.

10 p a v y z d y s. Skaičių seka apibrėžiama šiomis sąlygomis: $a_0=2$, $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$. Raskime sekos n-tojo nario formulę.

Sprendimas. Iš rekurentinės lygybės randame: $a_2=3a_1-2a_0=3\cdot3-2\cdot2=5$, $a_3=3a_2-2a_1=9$, $a_4=3a_3-2a_2=17$. Pastebime, kad $5=2^2+1$, $9=2^3+1$, $17=2^4+1$. Todėl galima spėti, jog $a_n=2^n+1$. Įrodysime šį teiginį matematinės indukcijos metodu.

Kai $n=1$, teiginys teisingas. Tarkime, kad jis teisingas su bet kuriuo $n\leqslant k$, ir įrodykime, kad tada jis teisingas ir su $n=k+1$.

Iš tikrųjų,

$$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=2^{k+1}+1.$$

Vadinasi, teiginys teisingas su visais $n\in N$ (čia pritaikėme matematinės indukcijos metodo formą, nurodytą 3 skyrelio teoremoje).

11 pavyzdys. Seka $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ apibrėžiama šiomis sąlygomis: $a_0=1$, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$. Įrodykime, kad ši seka turi dvi savybes:

1) $a_{2n+2}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}+1$;
2) $a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^n$.

Sprendimas. 1) Parašykime keletą pirmųjų sekos narių: $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=a_1+a_0=2$, $a_3=a_2+a_1=2+1=3$, $a_4=a_3+a_2=3+2=5$. Kai $n=1$, $a_{2n+2}=a_4=5=a_1+a_3+1$. Vadinasi, 1) teiginys teisingas, kai $n=1$.

Tarkime, kad jis teisingas, kai $n=k$, t. y.

$$a_{2k+2}=a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1}+1. \tag{9}$$

Įrodysime, kad tada jis teisingas ir su $n=k+1$, t. y.

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1.$$

Iš tikrųjų, iš rekurentinės lygybės aišku, kad $a_{2k+4}=a_{2k+3}+a_{2k+2}$. Dėmeniui a_{2k+2} taikydami (9) formulę, gauname:

$$a_{2k+4}=a_{2k+3}+(a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1}+1)=$$
$$=a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1.$$

Vadinasi, įrodinėjamoji lygybė teisinga su visais $n\in N$.

2) Kai $n=1$, teiginys teisingas: $a_1^2-a_0\cdot a_2=(-1)^1$, nes $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=2$.

Tarkime, kad

$$a_k^2-a_{k-1}\cdot a_{k+1}=(-1)^k,$$

ir įrodykime, kad tada

$$a_{k+1}^2-a_k\cdot a_{k+2}=(-1)^{k+1}.$$

Iš tikrųjų,

$$a_{k+1}^2-a_k\cdot a_{k+2}=a_{k+1}^2-a_k(a_{k+1}+a_k)=$$
$$=a_{k+1}^2-a_k\cdot a_{k+1}-a_k^2=a_{k+1}(a_{k+1})-a_k)-a_k^2=$$
$$=a_{k+1}\cdot a_{k-1}-a_k^2=-(a_k^2-a_{k-1}\cdot a_{k+1})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}.$$

Taigi mus dominanti savybė įrodyta.

Seka, apie kurią kalbama ką tik išnagrinėtame pavyzdyje, vadinama *Fibonačio seka* (XIII a. italų matematiko Leonardo Piziečio, rašiusio Fibonačio slapyvardžiu, garbei).

Pratimai

10. Įrodykime, kad Fibonačio seka turi šias savybes:

$$a_{2n+1}=1+a_2+a_4+\ldots+a_{2n};$$
$$a_{n+9}=a_{n-1}\cdot a_8+a_n\cdot a_9;$$
$$a_n\cdot a_{n+1}=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

11. Parašykite 11 pirmųjų Fibonačio sekos narių (nuo a_0 iki a_{10}). Palyginkite a_3 su suma a_0+a_1, a_4 su suma $a_0+a_1+a_2$, a_5 su suma $a_0+a_1+a_2+a_3, \ldots$, a_{10} su suma $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_8$. Suformuluokite hipotezę apie a_{n+2} ir sumos $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$ ryšį. Įrodykite jį matematinės indukcijos metodu.

12. Skaičių seka (a_n) apibrėžiama taip: $a_0=0$, $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$. Įrodykite, kad (a_n) — didėjanti seka.

13. Skaičių seka (a_n) apibrėžiama taip: $a_0=a$, $a_1=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$. Įrodykite, kad $a_n=\frac{a+2b}{3}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{b-a}{3\cdot 2^{n-1}}$.

14. Skaičių seka (a_n) apibrėžiama taip: $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n+1$. Įrodykite, kad $a_n=\frac{1}{2}(5\cdot 3^{n-1}-1)$.

15. Įrodykite tokį teiginį: jeigu $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, tai $a_n^2-3b_n^2=1$ su bet kuriuo $n\in N$.

8. Matematinės indukcijos metodo taikymas baigtinių aibių savybėms tirti. Pirmiausia išsiaiškinsime, kiek poaibių turi baigtinė aibė X.

Jeigu aibė X neturi nė vieno elemento, t. y. $X=\varnothing$, tai aišku, kad ji turi tik vieną poaibį: $\varnothing$.

Jeigu aibė X turi vieną elementą, t. y. $X=\{a\}$, tai aišku, jog ji turi du poaibius: $\varnothing$ ir $\{a\}$.

Dvielementė aibė $X=\{a, b\}$ turi keturis poaibius: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Trielementė aibė $X=\{a, b, c\}$ turi aštuonis poaibius: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

n-elementės aibės poaibių skaičių pažymėkime $S(n)$. Iš išnagrinėtųjų atskirų atvejų matome, kad $S(0)=1$, $S(1)=2$, $S(2)=4$, $S(3)=8$.

Pastebime, kad $1=2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$, $8=2^3$. Todėl keliame tokią indukcinę hipotezę: *n-elementės aibės poaibių skaičius lygus 2^n*. Įrodysime šį teiginį matematinės indukcijos metodu.

Jau įsitikinome, kad teiginys teisingas, kai $n=1$ (taip pat, kai $n=0, 2, 3$). Tarkime, kad jis teisingas, kai $n=k$, t. y. bet kuri

k-elementė aibė turi 2^k poaibių. Įrodysime, kad tada teiginys teisingas ir kai $n=k+1$, t. y. kad bet kuri $(k+1)$-elementė aibė turi 2^{k+1} poaibių.

Iš tikrųjų, tarkime, kad $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$. Šią $(k+1)$-elementę aibę galima gauti iš k-elementės aibės $Y=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, prijungiant vieną elementą x_{k+1}. Kiekvienas aibės X poaibis arba neturi to „pridėtinio" elemento x_{k+1}, arba jį turi. Pirmuoju atveju jis yra aibės Y poaibis, ir pagal indukcijos prielaidą tokių poaibių yra 2^k. Antruoju atveju, atmetę elementą x_{k+1}, vėl gauname aibės Y poaibį. Vadinasi, antrojo tipo poaibių skaičius lygus 2^k. Tačiau tada bendras aibės X poaibių skaičius lygus $2^k+2^k=2^{k+1}$.

Taigi įrodėme, kad lygybė $S(n)=2^n$ teisinga, kai $n=1$, ir iš jos teisingumo, kai $n=k$, išplaukia, kad ji teisinga, kai $n=k+1$. Iš čia, remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, jog teiginys teisingas su bet kuriuo $n \in N$.

Baigtinės aibės X elementų skaičių žymėkime $n(X)$. Jeigu, pavyzdžiui, $X=\{a, b, c, d\}$, tai $n(X)=4$. Dar apibrėšime aibių dekartinės sandaugos sąvoką ir išnagrinėsime, kiek elementų turi baigtinių aibių dekartinė sandauga.

Turime dvi aibes X_1 ir X_2. Sudarykime aibę iš visų galimų porų (a, b), kurių $a \in X_1$, $b \in X_2$. Kiekvienos tokios poros pirmoji komponentė — aibės X_1 elementas, o antroji — aibės X_2 elementas. Visų tokių porų aibė vadinama *aibių X_1 ir X_2 dekartine sandauga* ir žymima $X_1 \times X_2$. Pabrėžiame, kad čia kalbama apie vadinamąsias *sutvarkytąsias poras,* t. y. poros (a, b) ir (b, a), laikomos skirtingomis, kai $a \neq b$ (panašiai kaip kad skiriasi trupmenos $\frac{a}{b}$ ir $\frac{b}{a}$, kai $a \neq b$).

Pavyzdžiui, jeigu $X_1=\{a, b, c\}$, $x_2=\{1, 2\}$, tai dekartinę sandaugą $X_1 \times X_2$ sudaro šešios poros: $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(c, 1)$, $(c, 2)$. O štai dekartinę sandaugą $X_2 \times X_1$ sudaro taip pat šešios poros, tik jų komponenčių tvarka kita: $(1, a)$, $(2, a)$, $(1, b)$, $(2, b)$, $(1, c)$, $(2, c)$. Taigi, apskritai kalbant, aibės $X_1 \times X_2$ ir $X_2 \times X_1$ skirtingos: $X_1 \times X_2 \neq X_2 \times X_1$. Susitarta dekartinę sandaugą laikyti tuščia, kai nors viena iš aibių X_1, X_2 tuščia: $X_1 \times \varnothing = \varnothing \times X_2 = \varnothing$.

Raskime dekartinės sandaugos $X \times Y$ elementų skaičių tuo atveju, kai X turi m elementų, o Y — k elementų, t. y. $n(X)=m$, $n(Y)=k$. Sakykime, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Dekartinę sandaugą $X \times Y$ sudaro poros (x_i, y_j), kurių $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Tas poras galima surašyti taip:

$$\begin{array}{l} (x_1, y_1),\ (x_1, y_2),\ \ldots,\ (x_1, y_k); \\ (x_2, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_2, y_k); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_m, y_1),\ (x_m, y_2),\ \ldots,\ (x_m, y_k). \end{array}$$

Gavome m eilučių po k porų kiekvienoje eilutėje. Iš to aišku, kad bendras į $X \times Y$ įeinančių porų skaičius yra lygus mk, t. y. $n(X) \times \times n(Y)$. Kitaip tariant, teisinga tokia formulė:

$$n(X \times Y) = n(X) n(Y). \quad (10)$$

Sakykime, dabar turime s aibių $X_1, X_2, \ldots, X_s$. Sudarykime sutvarkytuosius rinkinius $\alpha = (x_1, x_2, \ldots x_s)$, kurių $x_k \in X_k$, $1 \leqslant \leqslant k \leqslant s$. Aibė, sudaryta iš visų tokių rinkinių α, vadinama aibių $X_1, X_2, \ldots, X_s$ *dekartine sandauga* ir žymima $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s$. Anksčiau matėme, jog $n(X \times Y) = n(X) n(Y)$. Matematinės indukcijos metodu šią lygybę galima apibendrinti bet kurio baigtinio aibių skaičiaus dekartinei sandaugai.

Sakykime, $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — baigtinės aibės, ir įsitikinsime, kad

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s) = n(X_1) n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_s). \quad (11)$$

Anksčiau jau patikrinome, jog (11) formulė teisinga, kai $s=2$. Tarkime, kad ji teisinga, kai $s=k$, t. y. teisinga lygybė,

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k) = n(X_1) n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k),$$

ir įrodykime, kad tada (11) formulė teisinga ir su $s=k+1$, t. y. teisinga lygybė

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = \\ = n(X_1) n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k) n(X_{k+1}).$$

Tikrai, nagrinėkime bet kurį aibės $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}$ elementą $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ ir pažymėkime $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Aišku, kad tarp rinkinių $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ aibės ir porų (α, x_{k+1}) aibės yra abipus vienareikšmė atitiktis, t. y. rinkinių $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ yra tiek pat, kiek ir porų (α, x_{k+1}). Jeigu visų α aibė yra A, tai galima pasakyti, kad aibė $X_1 \times X_2 \times \ldots \times \times X_k \times X_{k+1}$ turi tiek pat elementų, kiek ir aibė $A \times X_{k+1}$, t. y.

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = n(A \times X_{k+1}).$$

Kaip jau įrodėme anksčiau,

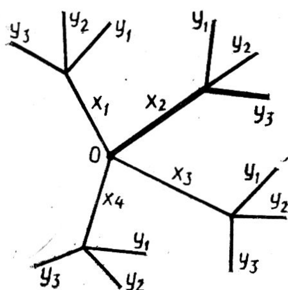
$$n(A \times X_{k+1}) = n(A) n(X_{k+1}),$$

o pagal konstrukciją aibė A yra ne kas kita, kaip $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. Remdamiesi indukcijos prielaida, įsitikiname, kad

$$n(A \times X_{k+1}) = n(A) n(X_{k+1}) = n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k) \times n(X_{k+1}) = \\ = n(X_1) n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k) n(X_{k+1}).$$

Vadinasi,

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = \\ n(X_1) n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k) n(X_{k+1}).$$



2 pav.

Taigi (11) formulė įrodyta su visais natūriniais skaičiais $s \geqslant 2$. Atskiru atveju iš jos išplaukia, kad

$$n(\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{s \text{ kartų}}) = (n(X))^s. \quad (12)$$

Tai reiškia, kad m-elementės aibės X s-tasis dekartinis laipsnis turi m^s elementų.

Įrodytąją (11) formulę galima pavaizduoti tam tikrais brėžiniais, vadinamais „medžiais". Sakykime, aibę X sudaro keturi elementai: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, o aibę Y — trys elementai $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Plokštumoje pažymėkime kurį nors tašką O ir iš jo išveskime keturias atkarpas, atitinkančias aibės X elementus. Iš kiekvienos atkarpos galo veskime po tris atkarpas, atitinkančias aibės Y elementus (2 pav.). Tada kiekvieną porą (x_k, y_l) atitinka taške O prasidedantis kelias, sudarytas iš dviejų atkarpų. Pavyzdžiui, porą (x_2, y_3) atitinka kelias, nurodytas 2 paveiksle. Tokių kelių aibė abipus vienareikšmiškai atitinka aibę galų atkarpų, išvestų antruoju žingsniu. Matome, kad šitų atkarpų skaičius lygus $4 \cdot 3 = 12$. Aišku, kad, pridėjus dar vieną aibę M, sudarytą iš penkių elementų, iš kiekvienos antruoju žingsniu išvestos atkarpos galo reikės išvesti dar po penkias atkarpas; iš viso bus $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ kelių. Tas skaičius lygus dekartinės sandaugos $X \times Y \times M$ elementų skaičiui.

Pratimai

16. Jei $X_1, X_2, \ldots, X_m$ — poromis nesikertančios baigtinės aibės (t. y. $X_i \cap X_j = \varnothing$, jeigu $i \neq j$), tai

$$n(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m) = n(X_1) + n(X_2) + \ldots + n(X_m), \text{ kai } m \geqslant 2.$$

Įrodykite.

17. Įrodykite, kad bet kurio iškilojo n-kampio kampų suma lygi $2d(n-2)$.

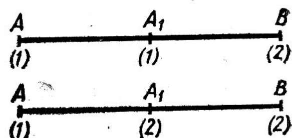
18. Įrodykite, kad bet kurio iškilojo n-kampio įstrižainių skaičius lygus $\frac{n(n-3)}{2}$.

9. **Indukcija geometrijoje.** Matematinės indukcijos metodas taikomas ir geometrijoje. Pateiksime pavyzdžių.

12 pavyzdys. Įrodykime, kad n skirtingų taškų, esančių tiesėje, dalija ją į $n+1$ intervalą (iš jų du intervalai begaliniai).

Sprendimas. Kai $n=1$, šis teiginys teisingas, nes vienas taškas tiesę dalija į $1+1=2$ intervalus. Tarkime, kad jis teisingas, kai $n=k$, t. y. kad bet kurie k skirtingų taškų tiesę dalija

į $k+1$ intervalą. Dabar nagrinėkime tiesėje $k+1$ tašką $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$. Jeigu atmesime tašką A_{k+1}, tai liks k taškų, dalijančių tiesę į $k+1$ intervalą. Taškas A_{k+1} yra viename iš šių intervalų ir savo ruožtu dalija jį į du intervalus. Todėl bendras skaičius intervalų, į kuriuos tiesę dalija $k+1$ taškas, yra lygus $(k+1)+1=k+2$.



3 pav.

Taigi teiginys teisingas, kai $n=1$, o iš jo teisingumo, kai $n=k$ išplaukia, kad jis teisingas, kai $n=k+1$. Vadinasi, įrodyta, kad jis teisingas su visais $n \in N$.

13* pavyzdys. Atkarpos $[AB]$ galai pažymėti skaitmenimis 1 ir 2. Padalykime ją į dalis taškais $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir kiekvienam iš tų taškų priskirkime vieną iš skaitmenų 1 ar 2. Įrodykime, kad atkarpų, kurių galų numeriai skirtingi, skaičius yra nelyginis.

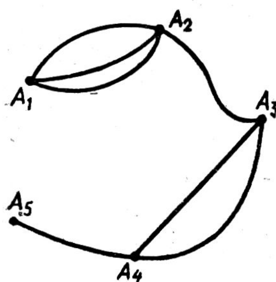
Sprendimas. Patogumo dėlei atkarpas, kurių galų numeriai skirtingi, vadinkime įvairiaspalvėmis, o atkarpas, kurių galų numeriai vienodi,— vienspalvėmis. Kai $n=1$, atkarpa $[AB]$ padalyta į dvi atkarpas. Nors ir kokį parašytume A_1 numerį, gausime vieną įvairiaspalvę ir vieną vienspalvę atkarpą (3 pav.). Šiuo atveju teiginys teisingas. Tarkime, kad jis teisingas, kai $n=k$. Atkarpoje $[AB]$ pažymėkime $k+1$ tašką: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, A_{k+1} ir priskirkime jiems numerius 1 ir 2. Atmetę tašką A_{k+1}, gausime atkarpos skaidinį į $k+1$ atkarpą, ir pagal indukcijos prielaidą įvairiaspalvių atkarpų skaičius šiuo atveju bus nelyginis. Dabar išnagrinėkime dvi galimybes.

a) Taškas A_{k+1} yra įvairiaspalvėje atkarpoje. Tada, kad ir kaip numeruotume tašką A_{k+1}, įvairiaspalvių atkarpų skaičius nepakis ir todėl liks nelyginis.

2) Taškas A_{k+1} yra vienspalvėje atkarpoje. Jeigu taškas A_{k+1} turės tą patį numerį, kaip ir atkarpos galai, tai įvairiaspalvių atkarpų skaičius nepakis (gausime dvi vienspalves atkarpas). Jeigu atkarpos galai turėjo vieną numerį, o taškas A_{k+1} — kitą, tai prisidės dvi įvairiaspalvės atkarpos, ir todėl bendras įvairiaspalvių atkarpų skaičius bus nelyginis.

Taigi teiginys teisingas, kai $n=1$, ir iš jo teisingumo, kai $n=k$, išplaukia, kad jis teisingas, kai $n=k+1$. Vadinasi, jis teisingas su visais $n \in N$.

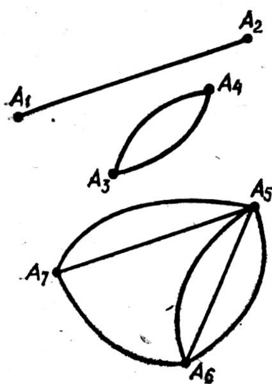
14 pavyzdys. Sakykime, plokštumoje yra n taškų: A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Kai kurias tų taškų poras taip sujunkime linijomis, kad jokios dvi linijos neturėtų bendrų taškų, nesutampančių su $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Taškus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vadinsime gautojo tinklo *viršūnėmis,* jo linijas — *briaunomis.* Briaunų skaičių pažymėkime r, sričių skaičių (įskaitant begalinę sritį) — s, o viršūnių skaičių — n (pavyzdžiui, 4 paveiksle pavaizduotame tinkle $n=5$, $r=7$, $s=4$). Tinklas vadinamas *jungiuoju,* jeigu iš kiekvieno jo taško



4 pav.

galima pereiti į bet kurį kitą, judant tik tinklo briaunomis (pavyzdžiui, 4 paveiksle tinklas jungus, o 5 paveiksle — nejungus). Raskime n, r ir s priklausomybę, kai tinklas jungusis.

Sprendimas. Aišku, kad, kai $n \geqslant 1$, iš bet kurios jungiojo tinklo viršūnės išeina bent viena briauna. Viršūnes, iš kurių išeina tik viena briauna, vadinsime *galinėmis* (viršūnė A_5 4 paveiksle). Jeigu tinklą sudaro n-kampio kraštinės, tai $r=n$, o $s=2$ (daugiakampio kontūras dalija plokštumą į dvi sritis). Todėl teisinga lygybė $n-r+s=2$. Ta lygybė bus teisinga, jeigu daugiakampio viduje pasirinksime tašką O ir sujungsime jį su visomis viršūnėmis (6 pav.) — gausime $n+1$ sritį, $n+1$ viršūnę ir $2n$ briaunų, o $(n+1)-2n+(n+1)=2$. Lygybė bus teisinga ir tada, kai iš kai kurių viršūnių išeis „kabančios" briaunos (pavyzdžiui, briauna A_4A_5 4 paveiksle) — kiekviena tokia briauna padidina vienetu tiek briaunų skaičių, tiek ir viršūnių skaičių, bet nekeičia sričių skaičiaus, todėl ji nekeičia reiškinio $n-r+s$ reikšmės.

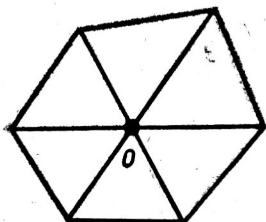


5 pav.

Visa tai leidžia iškelti hipotezę, kad teisingas šitoks teiginys: *kiekvienam plokštumos jungiajam tinklui teisinga lygybė $n-r+s=2$*. Šis teiginys vadinamas *Oilerio teorema*.

Įrodysime šią teoremą matematinės indukcijos metodu pagal briaunų skaičių r. Jeigu $r=1$, turime vieną briauną, jungiančią viršūnes A_1 ir A_2. Ši briauna nedalija plokštumos į dalis, todėl $s=1$. Vadinasi, $n=2$, $r=1$, $s=1$, taigi $n-r+s=2$. Šiuo atveju teorema teisinga.

Tarkime, kad Oilerio teorema jau įrodyta, kai $r=k$. Nagrinėkime tinklą, turintį $k+1$ briauną. Jo viršūnių skaičių žymėkime n, sričių skaičių — s. Norime įrodyti, kad $n-(k+1)+s=2$. Nagrinėkime dvi galimybes.



6 pav.

a) Tinkle yra uždaras kelias, išeinantis iš kurio nors taško ir į jį sugrįžtantis. Tada nutrinkime vieną iš briaunų, įeinančių į šį kelią. Viršūnių skaičius nepasikeis, o briaunų ir sričių skaičius sumažės

vienetu (nutrintoji briauna skyrė dvi sritis, kurios dabar susijungė į vieną). Vadinasi, gausime jungųjį tinklą, kuris turi n viršūnių, k briaunų ir $s-1$ sritį. Pagal indukcijos prielaidą $n-k+(s-1)=2$. Tačiau tai reiškia, kad $n-(k+1)+s=2$, t. y. kad Oilerio teorema teisinga ir pradiniam tinklui.

b) Tinkle nėra uždarų kelių (tokie tinklai vadinami *medžiais*). Lengva įrodyti, jog tokiame tinkle yra bent vienas galinis taškas (į jį galima patekti, išėjus iš bet kurios tinklo viršūnės ir judant jo briaunomis; kadangi tinkle nėra uždarųjų kelių, niekada negrįšime į jau nueitą tašką, todėl anksčiau ar vėliau pateksime į galinį tašką). Be to, tokiam tinklui $s=1$, nes aišku, jog medis plokštumos nedalija į dalis.

Atmeskime galinį tašką ir iš jo išeinančią briauną. Gausime jungųjį tinklą, turintį $n-1$ viršūnę, k briaunų ir 1 sritį. Pagal indukcijos prielaidą $n-1-k+1=2$. Todėl $n-(k+1)+1=2$, t. y. ir šiuo atveju teiginys teisingas, nes $s=1$.

Taigi Oilerio teorema teisinga tinklams su viena briauna, o iš jos teisingumo tinklui su k briaunų išplaukia, kad ji teisinga ir tinklui su $k+1$ briauna. Vadinasi, remiantis matematinės indukcijos principu, ji teisinga visiems tinklams.

Pratimai

19. Sakykime, atkarpoje $[AB]$ pažymėta n taškų ir tie taškai, taip pat kaip ir atkarpos galai, sunumeruoti skaitmenimis 1 ir 2; taško A numeris 1, taško B — numeris 2. Skaičių atkarpų, kurių kairiojo galo numeris 1, o dešiniojo numeris 2, pažymėkime r; skaičių atkarpų, kurių kairiojo galo numeris 2, o dešiniojo numeris 1, pažymėkime s (tariame, kad taškas A yra į kairę nuo taško B). Įrodykite, kad $r-s=1$.

20. Plokštumoje nubrėžta n tiesių. Įrodykite, jog sritis, į kurias tos tiesės dalija plokštumą, galima taip nuspalvinti balta ir juoda spalva, kad gretimos sritys (t. y. sritys, turinčios bent vieną bendrą briauną) būtų skirtingų spalvų (nuspalvinimas, turintis šią savybę, vadinamas *taisyklinguoju*).

21. Plokštumoje nubrėžta n apskritimų. Įrodykite, kad sritis, į kurias jie dalija plokštumą, galima taisyklingai nuspalvinti juoda ir balta spalva.

22. Įrodykite, kad žemėlapį galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvomis tada ir tik tada, kai į kiekvieną viršūnę sueina lyginis briaunų skaičius.

Atsakymai

1. $S_{316}=158$; $S_{327}=-164$. **2.** Ne.

4. a) $\frac{n}{2n+1}$; b) $\frac{n}{3n+1}$; c) $(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

5. a) $\frac{1}{n+1}$; b) $\frac{n+2}{2n+2}$. **7.** a) $n\geqslant 5$; b) $n\geqslant 10$.

11. $a_{n+2}=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n-1$.

1. Kombinatoriniai uždaviniai. Praktikoje dažnai tenka iš aibės išskirti elementų poaibius, kurių elementai turi vienokias ar kitokias savybes, išdėstyti vienos ar kelių aibių elementus tam tikra tvarka ir t. t. Pavyzdžiui, meistrui tenka skirstyti įvairaus pobūdžio darbus darbininkams, agronomui — žemės ūkio kultūras paskirstyti keliuose sklypuose, karininkui — iš kareivių būrio paskirti budėtojus ir t. t. Kadangi tokiuose uždaviniuose kalbama apie vienokias ar kitokias objektų kombinacijas, jie vadinami *kombinatorikos uždaviniais*. Matematikos šaka, nagrinėjanti kombinatorikos uždavinius, vadinama *kombinatorika*. Kombinatoriką galima laikyti baigtinių aibių teorijos dalimi — bet kurį kombinatorikos uždavinį galima suformuluoti kaip baigtinių aibių ir jų atvaizdžių uždavinį.

Skiriama keletas kombinatorikos uždavinių sprendimo lygių. Pradinis lygis — rasti nors vieną objektų dėstinį, turintį reikiamas savybes (pavyzdžiui, išdėstyti 10 taškų 5 atkarpose, kad kiekvienoje atkarpoje būtų po 4 taškus; arba aštuonias valdoves išdėstyti šachmatų lentoje taip, kad jos nekirstų viena kitos). Jeigu kombinatorikos uždavinys turi keletą sprendinių, tai kyla klausimas, kiek tokių sprendinių yra ir kaip apibūdinami visi to uždavinio sprendiniai. Pagaliau dažnai atsitinka, kad skirtingi kombinatorikos uždavinio sprendiniai vienas nuo kito skiriasi tam tikrais parametrais. Tada iškyla problema, kaip rasti tokio uždavinio optimalų sprendinį.

Čia spręsime tik vieną klausimą: kiek sprendinių turi nagrinėjamasis kombinatorikos uždavinys?

2. Sandaugos taisyklė. Kombinatorikos uždavinio sprendinių skaičiui rasti yra įvairių formulių — apie jas bus kalbama toliau. Iš esmės jos remiasi dviem paprastomis taisyklėmis, kurios vadinamos sandaugos ir sumos taisyklėmis. Šiame skyrelyje nagrinėsime sandaugos taisyklę. Su ja susipažinsime, nagrinėdami tokį uždavinį.

1 pavyzdys. Valgiaraštyje yra 4 pirmieji patiekalai ir 6 antrieji. Kiek yra būdų iš jų sudaryti pietus?

Sprendimas. Pirmuosius patiekalus pažymėkime skaitmenimis 1, 2, 3, 4, o antruosius — raidėmis a, b, c, d, e, f. Tada kiekvieni pietūs „užšifruojami“ skaitmens ir raidės kombinacija. Tokia kombinacija yra aibių $X=\{1, 2, 3, 4\}$ ir $Y=\{a, b, c, d, e, f\}$ dekartinės sandaugos $X\times Y$ elementas. Tačiau 8 skyrelyje (p. 21) buvo įrodyta, kad $n(X\times Y)=n(X)\cdot n(Y)$. Kadangi

$n(X)=4$, $n(Y)=6$, tai $n(X\times Y)=4\cdot 6=24$. Vadinasi, galima sudaryti 24 pietų variantus.

Bendruoju atveju uždavinys formuluojamas šitaip:

Turime dvi aibes X ir Y iš k ir n elementų. Kiek yra būdų sudaryti porai (x, y), kurios $x\in X$, $y\in Y$?

Kaip ir ką tik išnagrinėtame pavyzdyje, matome, kad tokių porų aibė yra aibių X ir Y dekartinė sandauga. Todėl tokių porų skaičius yra lygus dekartinės sandaugos elementų skaičiui; pagal (10) formulę (p. 21) jis lygus km.

Taigi įrodėme tokį teiginį:

Jeigu elementui x parinkti yra k būdų, o elementui y — m būdų, tai porą (x, y) galima parinkti km būdų.

Ši taisyklė vadinama *sandaugos taisykle.* Matematinės indukcijos metodu ji apibendrinama, kai reikia parinkti ne elementų porą, o trejetą, ketvertą ir t. t.

Jeigu elementui x_1 parinkti yra k_1 būdų, elementui x_2 — k_2 būdų, ..., elementui x_m — k_m būdų, tai rinkinį $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ galima sudaryti $k_1k_2\ldots k_m$ būdų.

Įrodinėjant užtenka remtis 8 skyrelio (11) formule (p. 21).

Toliau dažnai pasitaikys dekartinės sandaugos ir jų elementai, todėl susitarsime dekartinės sandaugos $X_1\times X_2\times\ldots\times X_k$ *elementą* vadinti *ilgio k kortežu, sudarytu iš aibių $X_1, X_2, \ldots, X_k$ elementų.* Jei visos tos aibės lygios X, tai $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ vadinamas *ilgio k kortežu, sudarytu iš aibės X elementų.* Elementas x_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ vadinamas kortežo $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i-tąja *komponente,* arba i-tąja *koordinate.*

Žodis „kortežas" lietuviškai reiškia iškilmingas eitynes (sakoma „vestuvių kortežas", „automašinų kortežas"). Kortežų pavyzdžiai — tai žodžiai (kortežai, sudaryti iš abėcėlės raidžių), dešimtainiai skaičių užrašai (kortežai, sudaryti iš skaitmenų) ir t. t.

Du kortežai $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ laikomi *lygiais,* kai jų ilgis vienodas, o komponentės su vienodais numeriais lygios. Kitaip tariant, jeigu $\alpha=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir $\beta=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, tai $\alpha=\beta$ tada ir tik tada, kai $k=m$ ir $x_i=y_i$ su visais i, $1\leqslant i\leqslant k$. Pavyzdžiui, jeigu $\alpha=(2^2, 3^2, 4^2)$, $\beta=(\sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256})$, tai $\alpha=\beta$, nes $2^2=\sqrt{16}$, $3^2=\sqrt{81}$, $4^2=\sqrt{256}$. Kortežai (a, b, c) ir (a, b, c, a) nelygūs, nes jų ilgis nevienodas. Kortežai (a, b, c) ir (b, c, a) yra vienodo ilgio ir sudaryti iš tų pačių elementų, bet jie nelygūs, nes jų komponenčių tvarka skirtinga.

Dar kartą pabrėšime, kuo kortežas skiriasi nuo aibės:

a) *aibės elementų tvarka nevaidina jokio vaidmens, o kortežai, kurie skiriasi elementų tvarka, nelygūs net tada, kai jie sudaryti iš tų pačių elementų;*

b) *aibės visi elementai yra skirtingi, o kortežo komponentės gali kartotis.*

Pratimai

1. Bibliotekoje yra 10 skirtingų A. Puškino knygų, 8 skirtingos I. Turgenevo knygos ir 7 skirtingos N. Gogolio knygos. Kiek yra būdų mokiniui pasirinkti knygas, kad iš jų būtų viena A. Puškino, viena I. Turgenevo ir viena N. Gogolio knyga?

3. Gretiniai su pasikartojimais. Ilgio k kortežai, sudaryti iš m-elementės aibės X elementų, taip pat vadinami *gretiniais su pasikartojimais iš m elementų po k.* Jų skaičius žymimas $\overline{A}_m^k$ (A — pirmoji prancūziško žodžio *arrangement* — gretinys — raidė)[1].

Iš (12) formulės (p. 22) išplaukia, jog

$$\overline{A}_m^k = m^k. \quad (1)$$

Pavyzdžiui, iš 32 lietuviškos abėcėlės raidžių galima sudaryti 32^2 „žodžių", kurių ilgis lygus 2 (*aa, ab, ac, ..., žz, žž*), 32^3 „žodžių", kurių ilgis lygus 3 (*aaa, aab, ..., žžz, žžž*), 32^4, kurių ilgis lygus 4 ir t. t. Panašiai iš 10 skaitmenų galima sudaryti 10^2 dviženklių numerių (00, 01, ..., 99), 10^3 triženklių numerių ir t. t.

(1) formulė naudinga, sprendžiant įvairiausius kombinatorikos uždavinius.

2 pavyzdys. Turime 5 skirtingas kėdes ir 7 įvairių spalvų rietimus audinio apmušalams. Kiek yra būdų apmušti kėdėms?

Sprendimas. Kadangi kėdės skirtingos, tai jas galima sustatyti tam tikra tvarka. Tada kiekvienas apmušimo būdas iš esmės yra sudarytas iš audinio spalvų aibės (7) elementų kortežas, kurio ilgis 5. Vadinasi, iš viso apmušimo būdų yra tiek, kiek yra tokių kortežų, t. y. gretinių su pasikartojimais iš 7 elementų po 5. Pagal (1) formulę $\overline{A}_7^5 = 7^5 = 16\,807$.

3 pavyzdys. 15 sunumeruotų biliardo rutulių sudėlioti į 6 biliardo stalo kišenes. Kiek yra būdų tai padaryti?

Sprendimas. Kiekvienam skaičiui nuo 1 iki 15 priskirkime numerį kišenės, į kurią įdėtas rutulys su tuo numeriu. Gausime iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6 (kišenių numeriai) sudarytą kortežą, kurio ilgis 15. Tokių kortežų skaičius yra $\overline{A}_6^{15} = 6^{15}$.

4 pavyzdys. Tarybų Sąjungoje automobilių numeriams sudaryti vartojama 10 skaitmenų ir 28 raidės. Kiekvieną numerį sudaro trys raidės ir keturi skaitmenys (išskyrus skaitmenų junginį 00—00). Kiek daugiausia gali būti mašinų numerių tokioje sistemoje?

Sprendimas. Iš pradžių parinkime keturis skaitmenis. Kiekvienas toks skaitmenų komplektas yra sudarytas iš duotosios

[1] Brūkšnys padėtas, kad gretinius su pasikartojimais galima būtų skirti nuo gretinių be pasikartojimų, kuriuos nagrinėsime vėliau (jų skaičių žymėsime A_m^k).

10-elementės skaitmenų aibės elementų kortežas, kurio ilgis 4, o iš viso tokių kortežų yra 10^4. Jeigu išmesime kortežą 0000, liks 10^4-1 kortežų. Analogiškai parinkti trims raidėms iš 28 yra 28^3 būdų. Skaitmenų komplektą pažymėkime α, raidžių komplektą — β. Tada kiekvienas numeris iš esmės yra pora (α, β), o tokios poros parinkimo būdų skaičių galima rasti pagal sandaugos taisyklę (žr. 2 skyrelį). Taikydami šią taisyklę, gauname $(10^4-1)\times \times 28^3=219\,498\,048$ mašinų numerių.

Pratimai

2. Keturi studentai laiko egzaminą. Kiek yra būdų jiems parašyti pažymius, žinant, jog nė vienas jų negavo nepatenkinamo pažymio?
3. Šešios įvairių medžiagų dėžės gabenamos į statybos penkis aukštus. Keliais būdais dėžes galima paskirstyti po aukštus?
4. Du laiškanešiai turi išnešioti 10 laiškų 10 nurodytų adresatų. Kiek yra būdų jiems pasiskirstyti darbą?

4. n-elementės aibės atvaizdžių m-elementėje aibėje skaičius. Jau kalbėjome apie tai, kad išvestoji (1) formulė naudinga, sprendžiant įvairiausius kombinatorikos uždavinius. Šiame skyrelyje pateiksime dar vieną pavyzdį, iliustruojantį šią mintį.

Norint nusakyti sudarytą iš aibės Y elementų kortežą, kurio ilgis k, užtenka nurodyti natūrinių skaičių $N_k=\{1, 2, \ldots, k\}$ atvaizdį f aibėje Y. Jeigu $f(1)$ pažymėsime y_1, $f(2)$ — y_2, ..., $f(k)$ — y_k, gausime kortežą $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Taip gausime dviejų aibių abipus vienareikšmę atitiktį: aibės ilgio k kortežų, sudarytų iš aibės Y elementų, ir atvaizdžių $f: N_k \to Y$ aibės. Todėl tokių kortežų skaičius lygus aibės N_k atvaizdžių aibėje Y skaičiui. Aišku, kad toks pat bus ir bet kurios k-elementės aibės atvaizdžių aibėje Y skaičius. Jeigu Y turi m elementų, tai kortežų skaičius yra lygus $\overline{A}_m^k = m^k$. Iš čia išplaukia, kad *k-elementės aibės X atvaizdžių m-elementėje aibėje Y skaičius lygus m^k.*

Šis rezultatas padeda rasti n-elementės aibės X poaibių skaičių. Iš tikrųjų, nagrinėkime du skaičius 0 ir 1. Kiekvienam aibės X poaibiui A galima priskirti tokį aibės X atvaizdį φ aibėje $\{0, 1\}$, kuris elementus iš A atvaizduoja į 1, o likusius elementus — į 0. Taigi egzistuoja aibės X poaibių ir tos aibės atvaizdžių aibėje $\{0, 1\}$ abipus vienareikšmė atitiktis. Tačiau tų atvaizdžių skaičius lygus 2^n (n — aibės X elementų skaičius). Todėl ir *n-elementės aibės X poaibių skaičius lygus 2^n.*

Anksčiau (žr. 8 skyrelį, p. 19) šį rezultatą gavome matematinės indukcijos metodu.

Pratimai

5. Raskite, kiek yra būdų sudėti k skirtingų daiktų į m skirtingų dėžių (kai kurios dėžės gali likti tuščios).

5. Bendroji sandaugos taisyklė. Gretiniai be pasikartojimų. Kartais būna taip, kad kortežo antrosios komponentės pasirinkimo galimybės, pasirinkus pirmąją komponentę, priklauso nuo to,

koks yra elementas x_1. Pavyzdžiui, gali būti pareikalauta, kad gretimi elementai būtų skirtingi. Jeigu elementai yra iš aibės $X=\{a, b, c, d\}$, tai, pasirinkus elementą a, toliau galima imti vieną iš elementų b, c, d, o pasirinkus elementą b — vieną iš elementų a, c, d. Tačiau abiem atvejais, pasirinkus pirmąją kortežo komponentę, yra trys antros komponentės pasirinkimo galimybės.

Bendroji sandaugos taisyklė formuluojama taip:

Sakykime, reikia sudaryti ilgio n kortežą, ir pirmajai to kortežo komponentei pasirinkti yra m_1 būdų, antrajai komponentei (kad ir kokia būtų pirmoji komponentė) — m_2 būdų, trečiajai (kad ir kokios būtų pirmosios dvi komponentės) — m_3 būdų, ..., n-tajai (kad ir kokios būtų ankstesnės komponentės) — m_n būdų. *Tada kortežą galima sudaryti $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$* būdų.

Kad šis teiginys teisingas su visais $n \geqslant 2$, įrodoma matematinės indukcijos metodu, kaip ir sandaugos taisyklė.

5 pavyzdys. Iš 32 lietuviškos abėcėlės raidžių sudarinėjami tokie 4 raidžių žodžiai, kad gretimos raidės žodyje skirtingos. Kiek tokių žodžių galima sudaryti (tinka ir žodžiai, neturintys lietuvių kalboje prasmės)?

Sprendimas. Pirmąją raidę galima pasirinkti 32 būdais. Pasirinkus pirmąją raidę, antrajai lieka tik 31 būdas, nes kartoti pirmosios raidės negalima. Trečioji raidė turi skirtis nuo antrosios (tačiau gali sutapti su pirmąja). Todėl ją galima pasirinkti taip pat 31 būdu, kaip ir ketvirtąją. Pagal bendrąją sandaugos taisyklę gauname, kad bendras žodžių skaičius lygus $32 \cdot 31 \times \times 31 \cdot 31 = 953\,312$.

Dažnai tenka spręsti tokį uždavinį: rasti skaičių ilgio k kortežų, sudarytų iš duotosios m-elementės aibės elementų, kuriuose nėra pasikartojančių elementų. Tokių kortežų sudarymą galima įsivaizduoti šitaip. Sudėkime aibės X elementus į maišelį ir traukime iš jo elementus vieną po kito, kiekvieną kartą užrašydami ištrauktą elementą ir atidėdami jį į šalį. Po k kartų gausime sudarytą iš aibės X elementų (tiksliau sakant, iš jų pavadinimų) ilgio k kortežą, ir jame nebus pasikartojančių elementų. Kortežą sudarys k skirtingų elementų, išdėstytų tam tikra tvarka. Tokie kortežai vadinami *sutvarkytosiomis aibėmis* (priminsime, kad aibėje nėra dviejų vienodų elementų, o korteže jų gali būti).

Taigi aibė vadinama *sutvarkyta,* jeigu jos elementai išdėstyti tam tikra tvarka. Tą pačią aibę galima sutvarkyti įvairiais būdais (pavyzdžiui, vienos klasės mokinių aibę galima sutvarkyti pagal amžių, ūgį, svorį, abėcėlę ir net pagal tokį atsitiktinį požymį, kaip jų atėjimo į mokyklą laikas rugsėjo 1 dieną).

Jeigu aibė X turi m elementų ir $k \leqslant m$, tai galima sudaryti įvairias sutvarkytąsias k-elementes aibes tik iš aibės X elementų. Pavyzdžiui, iš aibės $\{a, b, c, d\}$ elementų galima sudaryti 12 sutvarkytųjų poaibių po du elementus kiekviename: (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c).

Aibės X, turinčios m elementų, sutvarkytieji k-elementčiai poaibiai vadinami *gretiniais be pasikartojimų iš m elementų po k*. Jų skaičius žymimas A_m^k. Rasime formulę A_m^k apskaičiuoti.

Sakykime, aibė X turi m elementų. Sutvarkytąjį k-elementį poaibį galima gauti, pasirenkant iš X paeiliui elementus x_1, x_2, ..., x_k. Pirmuoju elementu x_1 gali būti bet kuris iš m aibės X elementų, todėl jam pasirinkti yra m būdų. Po to, kai pirmasis elementas pasirinktas, antrajam lieka jau tik $m-1$ būdas (gali būti bet kuris elementas, išskyrus jau pasirinktąjį). Pasirinkus pirmuosius du elementus, lieka $m-2$ galimybės pasirinkti trečiąjį elementą ir t. t. Paskutiniam k-tajam elementui pasirinkti yra $m-k+1$ būdas — iki jo jau paimtas $k-1$ elementas, todėl liko tik $m-(k-1)=m-k+1$ elementas.

Pagal bendrąją sandaugos taisyklę sužinome, jog m-elementės aibės X sutvarkytųjų k-elemenčių poaibių skaičius lygus skaičių m, $m-1$, $m-2$, ..., $m-k+1$ sandaugai, t. y. $m(m-1)\times$ $\times(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)$. Taigi įrodėme, kad

$$A_m^k=m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1). \qquad (2)$$

Anksčiau (žr. p. 12 išnašą) minėjome, kad pirmųjų n natūrinių skaičių sandauga, t. y. $1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$ vadinama *n-faktorialu* ir žymima $n!$ Sandaugą $m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)$ galima užrašyti trupmena

$$\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)\,(m-k)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(m-k)\cdot\ldots\cdot2\cdot1},$$

t. y. $\frac{m!}{(m-k)!}$. Taigi gauname, kad

$$A_m^k=\frac{m!}{(m-k)!}. \qquad (3)$$

Atskiru atveju, kai $k=0$, gauname: $A_m^0=\frac{m!}{m!}=1$.

5 p a v y z d y s. Kiek yra būdų iš 40 mokinių sudaryti klasės aktyvą, kuriame būtų seniūnas, komjaunimo sekretorius ir sienlaikraščio redaktorius?

S p r e n d i m a s. Čia kalbama apie 40 elementų aibės sutvarkytuosius trielemenčius poaibius, t. y. apie gretinius be pasikartojimų iš 40 elementų po 3. Remdamiesi (2) formule, randame:

$$A_{40}^3=40\cdot39\cdot38=59\,280.$$

6 p a v y z d y s. Šachmatų turnyre dalyvauja 5 moksleiviai ir 15 studentų. Manoma, kad jokie du dalyviai nesurinks vienodo taškų skaičiaus? Kiek būdų gali pasiskirstyti vietos, moksleivių užimtos turnyre?

S p r e n d i m a s. Iš viso yra 20 vietų, iš kurių moksleiviams priklauso 5. Vadinasi, kalbama apie 20 elementų aibės penkiaelemenčių poaibių sudarymą. Sakykime, moksleiviams atiteko 1-a,

5-a, 6-a, 9-a ir 12-a vieta. Be to, svarbu ir tvarka, kuria moksleiviai A, B, C, D, E užims tas vietas. Taigi čia kalbama apie 20 elementų aibės sutvarkytųjų penkiaelemenčių poaibių sudarymą, t. y. apie gretinius be pasikartojimų iš 20 elementų po 5. Pagal (2) formulę

$$A_{20}^5 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480.$$

7 pavyzdys. Klasėje yra 20 berniukų ir 20 mergaičių. Koncertui reikia šokėjų dueto, dainininkų dueto ir gimnastų dueto (kiekvieną duetą sudaro berniukas ir mergaitė). Kiek yra būdų tai padaryti (tariame, kad visi moka dainuoti, šokti ir atlikinėti gimnastikos pratimus)?

Sprendimas. Iš 20 berniukų parinkti 1 šokėją, 1 dainininką ir 1 gimnastą galima tiek būdų, kiek yra 20 elementų aibės sutvarkytųjų trielemenčių poaibių, t. y. A_{20}^3 būdų. Panašiai sužinome, kad yra A_{20}^3 būdų iš mergaičių aibės parinkti šokėją, dainininkę ir gimnastę. Pagal sandaugos taisyklę šokėjų, dainininkų ir gimnastų duetams parinkti yra

$$A_{20}^3 \cdot A_{20}^3 = (20 \cdot 19 \cdot 18)^2 = 46\,785\,600$$

būdų.

Pratimai

6. Kiek yra būdų paskirti 1-ąją, 2-ąją ir 3-ąją premiją trims asmenims, kai varžybose dalyvauja 10 asmenų?

7. Kiek yra būdų sudaryti trispalvę vėliavą (trys horizontalios spalvotos vienodo pločio juostos), turint penkių skirtingų spalvų audinio? Tas pats uždavinys, kai viena iš juostų turi būti raudona (raudona — viena iš turimų spalvų):

8. Kiek nelyginių keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, kai bet kurį iš jų kiekviename skaičiuje galima parašyti ne daugiau kaip vieną kartą?

9. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sudaromi visi galimi penkiaženkliai skaičiai; be to, skaičiai, kuriuose vienu metu yra skaitmenys 2, 4, 5, neturi vienodų skaitmenų. Kiek iš viso galima sudaryti tokių skaičių?

6. Kėliniai be pasikartojimų. Sakykime, aibė X turi m elementų. Nagrinėkime įvairius jos sutvarkymus. Taip gaunamos sutvarkytosios aibės viena nuo kitos skiriasi tik jas sudarančių elementų tvarka ir vadinamos *kėliniais be pasikartojimų iš m elementų*. Kėlinių be pasikartojimų skaičius žymimas P_m (pagal prancūzų kalbos žodžio *permutation* — kėlinys — pirmąją raidę). Pavyzdžiui, $P_3 = 6$, nes iš trijų elementų a, b, c galima sudaryti 6 kėlinius:

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a).$$

Išveskime P_m formulę. Aišku, kad kėlinys be pasikartojimų iš m elementų — tai tas pat, kas ir gretinys be pasikartojimų iš m elementų po m. Todėl, norint rasti P_m, užtenka, kad 5 skyrelio (2) formulėje $k=m$. Gaunаме:

$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = m! \quad (4)$$

Jeigu P_m apskaičiuosime pagal (3) formulę, gausime

$$P_m = A_m^m = \frac{m!}{0!}. \quad (5)$$

Palyginę (4) ir (5) lygybes, matome, kad $0!=1$. Iš pirmo žvilgsnio ši lygybė atrodo paradoksali. Bet su visais $m \geqslant 2$ teisinga lygybė $m! = (m-1)!\cdot m$. Jeigu norime, kad ši lygybė būtų teisinga ir su $m=1$, gauname: $1! = 0!\cdot 1$, ir iš čia vėl aišku, jog natūralu laikyti $0!=1$.

8 pavyzdys. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 sudaromi penkiaženkliai skaičiai, nesidalijantys iš 5 ir neturintys vienodų skaitmenų. Kiek yra tokių skaičių?

Sprendimas. Iš penkių skirtingų skaitmenų galima sudaryti P_5 penkiaženklių skaičių. Pagal uždavinio sąlygą tie skaičiai neturi dalytis iš 5, t. y. paskutinis skaitmuo neturi būti 5. Jeigu skaitmenį 5 parašysime paskutinėje vietoje, tai likusieji skaitmenys gali pasiskirstyti po skaičiaus skiltis P_4 būdų. Todėl visas uždavinio sąlygas tenkina $P_5 - P_4$ skaičių. Pagal kėlinių skaičiaus (4) formulę randame:

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

9 pavyzdys. 30 knygų — 27 skirtingų autorių knygos ir vieno autoriaus tritomis — sudėtos vienoje knygų lentynoje. Kiek yra būdų knygoms sudėti į lentyną taip, kad vieno autoriaus knygos būtų greta?

Sprendimas. Laikykime tritomio tris knygas viena knyga. Tada turėsime 28 knygas, kurioms sudėti į lentyną yra P_{28} būdų. Dar atsižvelkime į tai, kad 3 vieno autoriaus knygas galima sudėti P_3 būdų. Taikydami sandaugos taisyklę, sužinosime, kad knygoms sudėti yra

$$P_3 \cdot P_{28} = 3! \cdot 28!$$

būdų.

Pratimai

10. Turnyre dalyvauja 6 žmonės. Kiek yra būdų jiems pasiskirstyti vietomis?

11. Kiek yra būdų dvylikai žmonių susodinti už apskrito stalo?

12. Kiek įvairių kėlinių galima sudaryti iš žodžių „žiedas“, „plokštuma“, „kalendorius“ raidžių?

7. Deriniai be pasikartojimų. Išspręskime tokį uždavinį.

10 p a v y z d y s. Klasėje yra 40 mokinių. Kiek yra būdų parinkti iš jų tris mokinius dalyvauti šventinėje demonstracijoje?

S p r e n d i m a s. Jeigu iškviesime tris mokinius A, B, C vieną po kito ir išrikiuosime ta tvarka, kuria juos iškvietėme, tai aišku, kad gausime gretinį be pasikartojimų iš 40 po 3. Tokių gretinių skaičius lygus $A_{40}^3=40\cdot39\cdot38$. Tačiau, šitaip darydami, tą pačią demonstracijos dalyvių sudėtį gausime įvairiais būdais. Pavyzdžiui, gretinių (A, B, C) ir (C, B, A) dalyvių sudėtis bus ta pati. Kitaip tariant, perstatydami parinktus tris žmones bet kuria tvarka, gausime skirtingus gretinius, bet demonstracijos dalyvių sudėtis bus ta pati. Kadangi tris žmones galima perstatyti $3!=6$ būdais, tai skirtingų sudėčių skaičius yra $3!$ kartų mažesnis už gretinių skaičių. Todėl parinkti tris demonstracijos dalyvius iš 40 žmonių yra

$$\frac{A_{40}^3}{3!}=\frac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2\cdot1}=9\,880$$

būdų.

Išspręstasis uždavinys yra tokio bendro uždavinio atskiras atvejis:

Kiek yra būdų iš m-elementės aibės išskirti poaibį iš k elementų (pavyzdyje buvo $m=40$, $k=3$)? Čia išskiriami nesutvarkyti poaibiai. Tokie nesutvarkytieji poaibiai vadinami *deriniais be pasikartojimų iš m elementų po k,* o jų skaičius žymimas C_m^k (pagal prancūzų kalbos žodį *combinaison* — derinys). Pavyzdžiui, iš penkiaelementės aibės $X=\{a, b, c, d, e\}$ elementų galima sudaryti tokius dvielemenčius poaibius:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}.$$

Tų poaibių skaičius lygus 10. Taigi $C_5^2=10$. Pastebėsime, kad $C_m^0=1$, nes iš kiekvienos aibės X galima išskirti tik vieną poaibį, neturintį elementų, būtent, tuščiąją aibę. Toliau $C_m^1=m$ — iš aibės $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, turinčios m elementų, galima sudaryti m vienelemenčių poaibių, t. y. $\{x_i\}$ tipo poaibių $(1\leqslant i\leqslant m)$.

Išveskime formulę, išreiškiančią C_m^k skaičiais m ir k. Sakykime, iš m-elementės aibės X sudaryti visi poaibiai, turintys po k elementų. Sutvarkykime visais būdais kiekvieną tų poaibių. Gausime, ir tik po vieną kartą, visus aibės X sutvarkytuosius poaibius, kuriuose bus po k elementų. Kadangi X turi m elementų, tai tokių poaibių skaičius lygus A_m^k. Tačiau aibės X k-elemenčių poaibių skaičius lygus C_m^k, o kiekvieną jų galima sutvarkyti $P_k=k!$ būdų. Vadinasi, teisinga lygybė $A_m^k=k!\cdot C_m^k$. Iš jos su-

žinome, kad $C_m^k=\frac{A_m^k}{k!}$. Vietoj A_m^k parašę išraišką iš (3) formulės, gauname

$$C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}. \quad (6)$$

11 pavyzdys. Iš 20 laboratorijos darbuotojų 5 žmonės turi važiuoti į komandiruotę. Laboratorijos vedėjas ir du vyresnieji inžinieriai negali išvažiuoti vienu metu. Kiek gali būti skirtingų važiuojančios grupės sudėčių?

Sprendimas. Iš dvidešimties žmonių išrinkti penkis yra C_{20}^5 būdų. Tačiau iš šio skaičiaus reikia atmesti tuos variantus, kai laboratorijos vedėjas ir du vyresnieji inžinieriai įeina į važiuojančių grupę. Jeigu minėti trys žmonės įtraukti į penkių žmonių grupę, tai į likusias dvi vietas turime parinkti 2 žmones iš likusių 17, o tai padaryti galima C_{17}^2 būdais. Taigi į komandiruotę važiuojančios grupės skirtingų sudėčių gali būti $C_{20}^5-C_{17}^2$. Pagal (6) formulę apskaičiuojame:

$$C_{20}^5-C_{17}^2=\frac{20!}{5!15!}-\frac{17!}{2!15!}=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{17\cdot16}{1\cdot2}=$$
$$=15\,368.$$

12 pavyzdys. Kiek yra būdų šaškių lentos 32 juoduosiuose laukeliuose sustatyti 12 baltųjų ir 12 juodųjų šaškių?

Sprendimas. Laukelius baltosioms šaškėms parinkti yra C_{32}^{12} būdų. Po to lieka 20 laukelių, iš kurių C_{20}^{12} būdais galima pasirinkti laukelius juodosioms šaškėms. Iš viso pagal sandaugos taisyklę gauname

$$C_{32}^{12}\cdot C_{20}^{12}=\frac{32!}{12!20!}\cdot\frac{20!}{12!8!}=\frac{32!}{12!12!8!}.$$

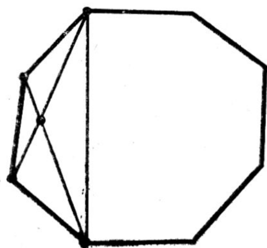
Pratimai

13. Iš 50 kareivių būrio, kuriame yra eilinis Ivanovas, į sargybą skiriami 4 žmonės. Kiek yra skirtingų būdų sudaryti sargybai? Kiek yra atvejų, kai į sargybą pateks eilinis Ivanovas?

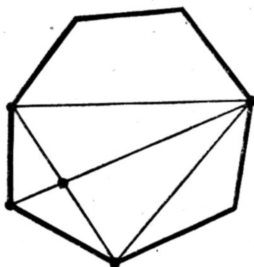
14. Kiekvienas rojalio akordas gali turėti nuo trijų iki dešimties garsų. Kiek skirtingų akordų galima išgauti iš dešimties tokio rojalio klavišų?

15. Trisdešimt žmonių suskirstyti į tris grupes, po 10 žmonių kiekvienoje. Kiek gali būti skirtingų skirstinių?

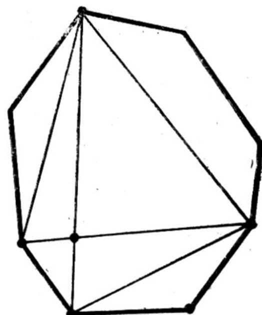
8. Geometriniai kombinatorikos uždaviniai. Yra daug geometrinių kombinatorikos uždavinių, pavyzdžiui, rasti daugiakampio įstrižainių skaičių, nustatyti kelių tiesių ar apskritimų sankirtos taškų skaičių ir t. t. Pateiksime tokios rūšies uždavinių sprendimo pavyzdį.



1 pav.



2 pav.



3 pav.

13 pavyzdys. Jokios trys iškilojo n-kampio įstrižainės nesikerta viename taške ($n \geqslant 4$). Raskime daugiakampio viduje esančių įstrižainių sankirtos taškų skaičių.

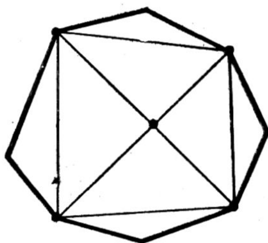
Sprendimas. Per bet kurias 4 daugiakampio viršūnes galima išvesti arba 3 (1 pav.), arba 4 (2 pav.), arba 5 (3 pav.), arba 6 (4 pav.) įstrižaines. Pirmu atveju iš trijų įstrižainių daugiakampio viduje kertasi dvi ir turi vieną sankirtos tašką. Kitais atvejais keturios įstrižainės gali turėti daugiau kaip vieną sankirtos tašką, bet iš tų taškų tik vienas yra daugiakampio viduje. Vadinasi, bet kuris vidinis įstrižainių sankirtos taškas vienareikšmiškai atitinka viršūnių ketvertą ir viršūnių tvarka neturi įtakos. Tokių ketvertų (taigi ir įstrižainių sankirtos vidinių taškų) skaičius lygus C_n^4.

Pratimai

16. Plokštumoje išvesta n tiesių, iš kurių jokios dvi nėra lygiagrečios ir jokios trys nesikerta viename taške. Kiek sankirtos taškų turi tos tiesės?

17. Kiek įstrižainių galima išvesti iškilajame 15-kampyje? n-kampyje?

18. Vienoje lygiagrečių tiesių pažymėta 10 taškų, kitoje — 7 taškai. Kiekvienas vienos tiesės taškas atkarpa sujungiamas su visais kitos tiesės taškais. Jokios trys atkarpos neturi bendro taško (bendri atkarpų galų taškai neskaitomi). Raskite gautųjų atkarpų sankirtos taškų skaičių.



4 pav.

9. Kėliniai su pasikartojimais. Suskaičiuokime, kiek įvairių „žodžių“ (t. y. nebūtinai prasmingų) galima gauti, kaitaliojant žodžio „sapnas“ raides. Apskritai kalbant,

6 raides galima perstatinėti vieną su kita 6! = 720 būdų. Bet dalykas tas, kad žodyje „sapnas“ kai kurios raidės kartojasi dukart ir, pavyzdžiui, sukeitus antrą ir penktą raidę, žodis nesikeičia. Todėl suskaičiuokime, kiek yra būdų raides kaitalioti taip, kad žodis nesikeistų. Nesunku suvokti, kad tokių būdų yra keturi: galima visas raides palikti vietoje arba sukeisti vieną su kita raides „s“, arba sukeisti raides „a“, arba sukeisti vietomis ir raides „s“, ir raides „a“. Vadinasi, skirtingų žodžio „sapnas“ kėlinių skaičius yra 4 kartus mažesnis už 720, t. y. 720 : 4 = 180 kėlinių.

Panašiai sprendžiamas bendresnis uždavinys: rasti skaičių skirtingų kortežų, kuriuos galima sudaryti perstatinėjant kortežo komponentes. Kad galėtume patikslinti uždavinio sąlygą, apibrėšime kortežo sudėties sąvoką.

Sakykime, ilgio n kortežas α, sudarytas iš m-elementės aibės $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ elementų. Kiekvieną skaičių k, $1 \leqslant k \leqslant m$, atitinka skaičius n_k, parodantis, kiek kartų elementas x_k kartojasi kortežo α komponentėse. Surašę iš eilės tuos skaičius, gauname naują kortežą $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, vadinamą *kortežo* α *sudėtimi*. Pavyzdžiui, jeigu $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, o $\alpha = (x_1, x_3, x_1, x_4, x_3, x_1)$, tai kortežo α sudėtis yra (3, 0, 2, 1).

Du tos pačios sudėties kortežai gali vienas nuo kito skirtis tik komponenčių tvarka. Jie vadinami *duotosios sudėties kėliniais su pasikartojimais*. Išveskime formulę rasti duotos sudėties kėlinių su pasikartojimais skaičiui.

Prieš spręsdami uždavinį bendru atveju, išnagrinėkime atskirą atvejį — raskime kėlinių su pasikartojimais skaičių iš raidžių a, a, a, b, b, c, c. Iš pradžių tas raides sunumeruokime: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$. Kadangi sunumeravus visos raidės tapo skirtingomis (dabar jau galime a_1 atskirti nuo a_2), tai iš jų galima sudaryti 7! kėlinių $(3+2+2=7)$. Jeigu kiekviename kėlinyje nutrinsime raidžių indeksus, gausime kėlinius su pasikartojimais iš raidžių a, a, a, b, b, c, c. Pavyzdžiui, iš kėlinio $(a_1, b_1, c_2, c_1, a_3, b_2, a_2)$ gausime (a, b, c, c, a, b, a). Taip darant, kiekvienas kėlinys su pasikartojimais gaunamas keletą kartų. Pavyzdžiui, kėlinys su pasikartojimais (a, a, a, b, b, c, c) gaunamas iš raidžių $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ visų kėlinių, kuriuose pirmose trijose vietose yra raidės a_1, a_2, a_3 (bet kuria tvarka), ketvirtoje ir penktoje — raidės b_1 ir b_2 (bet kuria tvarka), o šeštą ir septintą vietą užima raidės c_1 ir c_2. Tačiau raides a_1, a_2, a_3 galima kaitalioti 3! būdais, raides b_1, b_2 — 2! būdais ir raides c_1, c_2 — 2! būdais. Kadangi tuos būdus galima bet kaip derinti vieną su kitu, tai aišku, jog kortežą (a, a, a, b, b, c, c) gausime iš 3!2!2! kėlinių, kurie sudaromi iš raidžių $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$. Tokiu pat skaičiumi būdų gausime bet kurį kitą raidžių a, a, a, b, b, c, c kėlinį su pasikartojimais. Vadinasi, skirtingų kėlinių su pasikartojimais skaičius $3! \cdot 2! \cdot 2!$ kartų mažesnis už bendrą septynių raidžių $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ kėlinių skaičių, t. y. lygus

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210.$$

Panašiai nagrinėjamas ir bendrasis atvejis: sudėties (n_1, n_2, ..., n_m) kėlinių su pasikartojimais skaičius $P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ išreiškiamas formule

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}. \qquad (7)$$

Pavyzdžiui, žodžio ARARATAS raidėms perstatinėti yra

$$\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 840$$

būdų.

Iš (7) formulės išplaukia, kad $m-k$ raidžių a ir k raidžių b galima perstatinėti $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ būdų. Tačiau šis skaičius lygus C_m^k (žr. (6) formulę). Vadinasi, sudėties $(m-k, k)$ kėlinių su pasikartojimais skaičius lygus C_m^k:

$$P(m-k, k) = C_m^k. \qquad (8)$$

Šį teiginį nesunku įrodyti, ir nesiremiant bendra (7) formule. Iš tikrųjų, bet kuris kėlinys su pasikartojimais iš $m-k$ raidžių a ir k raidžių b vienareikšmiškai nusakomas nurodžius vietas, kuriose yra raidės b. Kadangi bendras vietų skaičius lygus $(m-k)+k=m$, o raidės b užima k vietų, tai toms vietoms užimti yra C_m^k būdų.

14 pavyzdys. Kiek yra būdų sustatyti baltąsias figūras: 2 žirgus, 2 rikius, 2 bokštus, 1 valdovę, 1 karalių pirmoje šachmatų lentos linijoje?

Sprendimas. Šiame uždavinyje reikia sužinoti, koks yra ilgis 8 kortežų, kurių sudėtis (2, 2, 2, 1, 1). Tokių kortežų, t. y. kėlinių su pasikartojimais, skaičius lygus

$$P(2, 2, 2, 1, 1) = \frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5\,040.$$

Pratimai

19. Kiek „žodžių“ galima sudaryti, kaitaliojant raides žodyje „matematika“?

20. Yra 20 pavadinimų prekių. Į pirmą parduotuvę reikia pristatyti 8 pavadinimų, į antrą — 7 pavadinimų, į trečią — 5 pavadinimų prekes. Kiek yra būdų jas paskirstyti trims parduotuvėms?

10. Deriniai su pasikartojimais. 9 skyrelyje radome nurodytosios sudėties kortežų skaičių. Dabar sužinosime, kiek įvairių sudėčių gali turėti ilgio n kortežai, sudaryti iš m-elementės aibės X elementų. Kiekviena sudėtis yra kortežas, sudarytas iš m skaičių n_1, n_2, ..., n_m, kai $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. Ją galima užrašyti

kaip kortežą iš nulių ir vienetų, kiekvieną skaičių pakeičiant atitinkamų vienetų skaičiumi ir parašant nulį po kiekvienos vienetų grupės, išskyrus paskutinę. Pavyzdžiui, vietoj kortežo (4, 2, 1) galima rašyti (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1), o vietoj kortežo (2, 0, 0, 3) — kortežą (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1). Gautųjų kortežų vienetų skaičius lygus $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$, o nulių skaičius lygus $m-1$. Todėl tokių skirtingų kortežų skaičius lygus skaičiui kėlinių su pasikartojimais iš n vienetų ir $m-1$ nulių, t. y. $P(n, m-1)$. Pagal (8) formulę $P(n, m-1)=C^n_{n+m-1}$.

Taigi įrodėme, kad *ilgio n kortežų, kurių komponentės priklauso duotajai m-elementei aibei, sudėčių skaičius lygus* C^n_{n+m-1}.

Ilgio n kortežų, kurių komponentės priklauso duotajai m-elementei aibei, skirtingos sudėtys vadinamos *deriniais su pasikartojimais iš m elementų po n*. Jų skaičius žymimas $\bar{C}^n_m$. Įrodėme, kad

$$\bar{C}^n_m=C^n_{n+m-1}. \tag{9}$$

15 pavyzdys. Turime 4 rūšių pyragaičių. Kiek yra būdų sudaryti rinkinį iš 8 pyragaičių?

Sprendimas. Kadangi šiame uždavinyje pyragaičių tvarka nesvarbu, tai kiekvienas rinkinys nusakomas ilgio 8 kortežu iš 4 elementų (pyragaičių rūšių pavadinimų); kortežo komponenčių tvarka nesvarbu. Kitaip tariant, reikia rasti tokių kortežų skirtingų sudėčių skaičių, t. y. derinių su pasikartojimais iš 4 elementų po 8 skaičių. Gauname:

$$\bar{C}^8_4=C^8_{11}=\frac{11!}{8!3!}=\frac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2\cdot1}=165.$$

Taigi galima sudaryti 165 skirtingus rinkinius.

Pratimai

21. Pašto skyriuje parduodami 10 rūšių atvirukai. Kiek yra būdų jame nusipirkti 12 atvirukų?

22. 6 vienodus daiktus reikia sudėti į tris dėžes. Kiekvienoje dėžėje telpa visi 6 daiktai. Kiek yra būdų tai padaryti?

11. Sumos taisyklė. Iki šiol sprendėme uždavinius, taikydami sandaugos taisyklę ir jos išvadas, t. y. rasdavome dekartinės aibių sandaugos ir jos poaibių elementų skaičių. Tačiau yra daug uždavinių, kuriuos sprendžiant apskaičiuojamas kelių aibių sąjungos elementų skaičius. Jeigu aibės $X_1, X_2, \ldots, X_m$ kas dvi neturi bendrų elementų, t. y. $X_i \cap X_j=\varnothing$ su $i\neq j$, tai jų sąjungos elementų skaičių galima rasti, sudėjus tų aibių elementų skaičius:

$$n(X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_m)=n(X_1)+n(X_2)+\ldots+n(X_m)$$

(žr. p. 22, 16 pratimą). Šis teiginys kombinatorikoje vadinamas *sumos taisykle*. Kai $m=2$, ją galima suformuluoti taip:

Jeigu elementui x pasirinkti yra k būdų, o elementui y — n būdų, ir nė vienas elemento x pasirinkimo būdas nesutampa su kuriuo nors elemento y pasirinkimo būdu, tai pasirinkti „x arba y" galima k+n būdų.

Pavyzdžiui, jeigu vazoje yra 8 obuoliai ir 6 kriaušės, tai vieną vaisių galima pasirinkti 14 skirtingų būdų.

Dažnai tenka sandaugos ir sumos taisykles taikyti kartu.

16 pavyzdys. Iš miesto A į miestą B eina k kelių, o į miestą C — l kelių. Į miestą D iš miesto B veda m kelių, o iš miesto C — n kelių. Miestai B ir C keliais nesujungti. Kiek skirtingų autobuso maršrutų galima sudaryti tarp miestų A ir D?

Sprendimas. Nagrinėkime visus galimus maršrutus, einančius iš A į D per B. Iš A į B veda k kelių, o iš B į D — m kelių. Kiekvieną išeinančių iš A kelių, galima derinti su bet kuriuo keliu, ateinančiu į D. Todėl bendrą skaičių skirtingų maršrutų, einančių iš A į D per B, randame pagal sandaugos taisyklę — jis lygus km. Analogiškai apskaičiuojame einančių iš A į D per C skirtingų maršrutų skaičių — jis lygus ln.

Dabar pastebime, kad kiekvienas autobuso maršrutas, jungiantis A ir D, turi eiti arba per B, arba per C (nes B ir C keliu nesujungti). Todėl jis turi būti arba tuose km maršrutuose, kurie eina per B, arba tuose ln maršrutuose, kurie eina per C. Bendrą skirtingų maršrutų skaičių randame pagal sumos taisyklę — jis lygus $km+ln$.

Pratimai

23. Mokyklos bibliotekoje yra I. Turgenevo romano „Rudinas" 6 egzemplioriai, romano „Bajorų gūžta" 3 egzemplioriai ir romano „Tėvai ir vaikai" 4 egzemplioriai. Be to, yra 5 tomai su dviem romanais „Rudinas" ir „Bajorų gūžta" ir 7 tomai su dviem romanais „Bajorų gūžta" ir „Tėvai ir vaikai". Kiek yra būdų iš bibliotekos paimti visus tris romanus taip, kad nė vienas jų nepatektų du kartus?

12. Skaičių C_m^k savybės. Skaičiai C_m^k parodo, kiek k-elemenčių poaibių galima sudaryti iš m-elementės aibės X elementų, t. y. derinių be pasikartojimų iš m elementų po k skaičių. Jie pasižymi daugeliu svarbių savybių, nusakančių įvairius aibės X poaibių sąryšius. Tas savybes galima įrodinėti tiesiogiai, remiantis (6) formule. Tačiau turiningesni yra įrodymai, pagrįsti aibių teorija.

1) *Jeigu* $0 \leqslant k \leqslant m$, *tai*

$$C_m^k = C_m^{m-k}. \tag{10}$$

Remiantis (6) formule, teiginys įrodomas iš karto:

$$C_m^{m-k}=\frac{m!}{(m-k)!\,(m-(m-k))!}=\frac{m!}{(m-k)!\,k!}=C_m^k.$$

Šio teiginio prasmė yra tokia. Sakykime, aibę X sudaro m elementų. Tada kiekvieną aibės X k-elementį poaibį A atitinka vienas poaibis, sudarytas iš $(m-k)$ elementų. Jis gaunamas, pašalinus iš aibės X visus poaibio A elementus, ir vadinamas poaibio A *papildiniu aibėje* X. Bet kuris $(m-k)$-elementis aibės X poaibis yra vieno ir tik vieno k-elemenčio poaibio papildinys. Todėl egzistuoja k-elemenčių ir $(m-k)$-elemenčių poaibių abipus vienareikšmė atitiktis, ir šių dviejų tipų poaibių skaičius vienodas. Šis teiginys ir išreikštas (10) formule.

2) *Teisinga lygybė*

$$C_m^0+C_m^1+C_m^2+\ldots+C_m^m=2^m. \tag{11}$$

Iš tikrųjų, 8 skyrelyje (p. 19) įrodėme, kad visų m-elementės aibės X poaibių skaičius yra 2^m. Tačiau kiekvienas aibės X poaibis turi k elementų (k — sveikasis skaičius, $0\leqslant k\leqslant m$). Kadangi k-elemenčių aibės X poaibių skaičius lygus C_m^k, tai pagal sumos taisyklę visų m-elementės aibės poaibių skaičius lygus C_m^0+ $+C_m^1+C_m^2+\ldots+C_m^m$. Palyginę aibės X visų poaibių skaičiaus abi rastąsias išraiškas, gauname (11) lygybę.

3) *Su bet kuriais m ir k, kai $1\leqslant k\leqslant m-1$, yra teisinga lygybė*

$$C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^k. \tag{12}$$

Iš tikrųjų, kadangi

$$C_{m-1}^{k-1}=\frac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-k)!}=\frac{(m-1)!\cdot k}{k!\,(m-k)!}$$

ir

$$C_{m-1}^k=\frac{(m-1)!}{k!\,(m-1-k)!}=\frac{(m-1)!\cdot(m-k)}{k!\,(m-k)!},$$

tai, įrašę šias reikšmes į (12) formulės dešinę pusę, gauname

$$C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^k=\frac{(m-1)!k}{k!\,(m-k)!}+\frac{(m-1)!\,(m-k)}{k!\,(m-k)!}=$$
$$=\frac{(m-1)!\,(k+m-k)}{k!\,(m-k)!}=\frac{(m-1)!\cdot m}{k!\,(m-k)!}=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}=C_m^k.$$

(12) lygybė įrodyta.

Pateiksime kitą šios lygybės įrodymą, atskleidžiantį jos prasmę aibių teorijoje. Sakykime, X turi m elementų. Išskirkime vieną tų elementų, pavyzdžiui, elementą a. Tada aibės X visus k-elemenčius poaibius galima suskirstyti į dvi klases: pirmąją sudaro poaibiai, kuriuose nėra elemento a, o antrąją — poaibiai, turintys šį elementą. Tačiau jeigu k-elementis poaibis neturi elemento a,

tai jis yra poaibis aibės X', gautos iš aibės X, pašalinus elementą a. Todėl pirmosios klasės k-elemenčių poaibių skaičius lygus aibės X' k-elemenčių poaibių skaičiui. Kadangi X' turi $m-1$ elementą, tai tas skaičius yra lygus C_{m-1}^{k}. Raskime antrosios klasės k-elemenčių poaibių skaičių. Visi tie poaibiai turi elementą a. Jeigu iš jų pašalinsime tą elementą, tai gausime $(k-1)$-elemenčius poaibius, neturinčius a ir sudarytus iš aibės X' elementų. Taigi antrosios klasės poaibių skaičius lygus aibės X' $(k-1)$-elemenčių poaibių skaičiui, t. y. C_{m-1}^{k-1}.

Kadangi kiekvienas k-elementis poaibis arba turi elementą a, arba jo neturi, tai jis priklauso arba pirmajai, arba antrajai klasei. Todėl pagal sumos taisyklę išeina, jog m-elementės aibės X visų k-elemenčių poaibių skaičius C_m^k lygus $C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}$. Taigi $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}$.

13. Paskalio trikampis. Pagal 12 skyrelio (12) formulę galima apskaičiuoti C_m^k reikšmes, žinant C_{m-1}^{k-1} ir C_{m-1}^{k}. Kitaip tariant, remiantis šia lygybe, galima paeiliui apskaičiuoti C_m^k; be rekurentinio sąryšio, dar teks remtis tuo, kad $C_0^0=C_1^0=\ldots=$ $=C_m^0=C_m^m=1$. Skaičiuoti patogu sudarant trikampę lentelę:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Lentelės $(m+1)$-oje eilutėje surašyti skaičiai $C_m^0, C_m^1, \ldots, C_m^m$. Čia $C_m^0=C_m^m=1$, o kiti skaičiai randami iš (12) formulės. Kadangi C_{m-1}^{k-1} ir C_{m-1}^{k} šioje lentelėje yra eilute aukščiau negu C_m^k ir parašyti joje į dešinę ir kairę nuo C_m^k, tai, norint rasti C_m^k, reikia sudėti į dešinę ir į kairę nuo jo esančius ankstesnės eilutės skaičius. Pavyzdžiui, reikšmę 10 šeštoje eilutėje gavome, sudėję penktosios eilutės skaičius 4 ir 6.

Tokia trikampė lentelė vadinama Paskalio trikampiu (XVII a. prancūzų matematiko Blezo Paskalio, išsamiai ištyrusio jo savybes, garbei). Reikia pažymėti, kad šią lentelę pirmieji sudarė arabų matematikai Gijasedinas Kaši ir Omaras Chajamas, gyvenę XIII a., o iš Europos mokslininkų su ja susipažinęs buvo XVI a. italų matematikas ir mechanikas Nikolas Tartalja.

14. Niutono binomas. Su Paskalio trikampio eilučių skaičiais susiduriame, keldami laipsniu dvinarį $a+b$. Pavyzdžiui,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Pastebime, kad koeficientai 1, 2, 1 — tai skaičiai, surašyti trečioje lentelės eilutėje, t. y. C_2^0, C_2^1, C_2^2, o 1, 3, 3, 1 — skaičiai, surašyti ketvirtoje tos lentelės eilutėje, t. y. C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3.

Todėl kyla hipotezė, kad su bet kuriuo $n\in N$ teisinga lygybė

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n. \quad (13)$$

Kad (13) lygybė teisinga, įrodysime matematinės indukcijos metodu.

Kai $n=1$, (13) lygybė virsta tokia: $(a+b)^1=C_1^0a+C_1^1b$; ji teisinga, nes $C_1^0=C_1^1=1$.

Dabar tarkime, kad (13) lygybė įrodyta, kai $n=m$, t. y.

$$(a+b)^m=C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+\ldots+C_m^{k-1}a^{m-k+1}b^{k-1}+C_m^ka^{m-k}b^k+$$
$$+\ldots+C_m^mb^m. \quad (14)$$

Įrodykime, kad tada (13) lygybė teisinga ir su $n=m+1$.

Padauginę abi (14) lygybės puses iš $a+b$, gausime:

$$(a+b)^{m+1}=(C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+\ldots+C_m^{k-1}a^{m-k+1}b^{k-1}+$$
$$+C_m^ka^{m-k}b^k+\ldots+C_m^mb^m)(a+b)=C_m^0a^{m+1}+(C_m^0+$$
$$+C_m^1)a^mb+\ldots+(C_m^k+C_m^{k-1})a^{m-k+1}b^k+\ldots+C_m^mb^{m+1}.$$

Iš tikrųjų, $a^{m-k+1}b^k$ gali atsirasti dvejopai: kai $C_m^k\,a^{m-k}b^k$ dauginame iš a ir kai $C_m^{k-1}\,a^{m-k+1}b^{k-1}$ dauginame iš b. Dabar, prisiminę, kad

$$C_m^0=C_{m+1}^0=1,\ C_m^m=C_{m+1}^{m+1}=1,\ C_m^k+C_m^{k-1}=C_{m+1}^k,$$

gauname:

$$(a+b)^{m+1}=C_{m+1}^0a^{m+1}+C_{m+1}^1a^mb+\ldots+C_{m+1}^ka^{m+1-k}b^k+\ldots+$$
$$+C_{m+1}^{m+1}b^{m+1}.$$

Ši lygybė yra ne kas kita, kaip (13) lygybė su $n=m+1$.

Taigi įrodėme, kad (13) lygybė teisinga su $n=1$, o iš jos teisingumo, kai $n=m$, išvedėme, kad ji teisinga ir kai $n=m+1$. Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, kad ji teisinga su visomis $n\in N$.

(13) formulė vadinama Niutono binomo formule XVI—XVII a. anglų mokslininko Izaoko Niutono garbei, nors ją daug anksčiau už Niutoną išvedė minėtasis Gijasedinas Kaši ir kiti. Niutono nuopelnas yra tas, kad jis apibendrino (13) formulę visiems realiesiems rodikliams.

Remiantis (13) formule, galima tirti tiek kai kurias jau žinomas skaičių C_n^k savybes (šie daugianario koeficientai (13) formulės dešinėje pusėje vadinami *binominiais koeficientais*), tiek ir naujas savybes. Pavyzdžiui, į (13) formulę įrašę $a=b=1$, gauname:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$$

(žr. 12 skyrelio (11) formulę. Įrašę $a=1$, $b=-1$, gausime:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Iš čia sužinome, kad

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots.$$

17 pavyzdys. Raskime binomo laipsnio $(2x-3)^5$ dėstinį.

Sprendimas. Kai $a=2x$, $b=-3$, gauname:

$$(2x-3)^5 = (a+b)^5 =$$
$$= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 =$$
$$= (2x)^5 + 5(2x)^4(-3) + 10(2x)^3(-3)^2 + 10(2x)^2(-3)^3 +$$
$$+ 5(2x)(-3)^4 + (-3)^5 = 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 +$$
$$+ 810x - 243.$$

18 pavyzdys. Įrodykime, kad $(3^{2n+3} - 24n + 37) \vdots 64$ su bet kuriuo $n \in N$.

Sprendimas. Kadangi

$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 27 \cdot 9^n - 24n + 37 = 27(1+8)^n - 24n + 37 =$$
$$= 27(C_n^0 + C_n^1 \cdot 8 + C_n^2 \cdot 8^2 + C_n^3 \cdot 8^3 + \ldots + C_n^n \cdot 8^n) - 24n + 37 =$$
$$= 27 + 216n + 8^2 \cdot \underbrace{(27C_n^2 + 27C_n^3 \cdot 8 + \ldots + 27C_n^n \cdot 8^{n-2})}_{a} - 24n + 37 =$$
$$= 64 + 192n + 64a,$$

tai gautoji suma dalijasi iš 64. Tai ir reikėjo įrodyti.

Pastaba. Šį pavyzdį galima išspręsti ir matematinės indukcijos metodu (žr. p. 16, 9f pratimą).

Pratimai

24. Parašykite binomo laipsnio $(x+1)^7$ dėstinį.

25. Raskite nario su x^4 koeficientą reiškinio

$$x(1-x)^4 + x^2(1+2x)^8 + x^3(1+3x)^{12},$$

dėstinyje.

26. Raskite nario su x^3 koeficientą reiškinio

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \ldots + (1+x)^{10}$$

dėstinyje.

27. Raskite didžiausią dėstinio $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{20}$ narį.

28. Kam lygus didžiausias dėstinio $(a+b)^n$ koeficientas, kai visų koeficientų suma lygi 4096?

29. Atlikite 9b pratimą (p. 16), nesiremdami matematinės indukcijos metodu.

15. Polinominė formulė. Niutono binomo formulę galima išvesti kitu būdu, kuris skiriasi nuo anksčiau pateikto 13 skyrelyje. Dėl to užrašykime reiškinį $(a+b)^n$ taip:

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ kartų}}$$

ir sudauginkime dvinarius, rašydami daugiklius jų atsiradimo tvarka. Pavyzdžiui, $(a+b)^2$ rašysime taip:

$$(a+b)(a+b)=aa+ba+ab+bb,$$

o $(a+b)^3$ — taip:

$$(a+b)(a+b)(a+b)=$$
$$=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb.$$

Aišku, kad dėmenys dešinėje pusėje bus visų galimų ilgio n kėlinių su pasikartojimais iš raidžių a ir b elementų sandaugos. Norint sutraukti panašiuosius narius, reikia rasti sudėties (n_1, n_2), kai $n_1+n_2=n$), kėlinių skaičių, t. y. $P(n_1, n_2)$. Tada gausime $P(n_1, n_2)a^{n_1}b^{n_2}$ tipo dėmenų sumą. Vartodami sumos ženklu Σ („sigma"— graikų raidyno raidė), gauname tokią lygybę:

$$(a+b)^n=\Sigma P(n_1, n_2)a^{n_1}b^{n_2}, \qquad (15)$$

kurios dešinė pusė sumuojama pagal visus tokius kortežus (n_1, n_2), kad $n_1+n_2=n$.

Norint (15) lygybę užrašyti paprasčiau (žr. (13) formulę), užtenka pažymėti $n_2=k$, $n_1=n-k$ ir pastebėti, jog $P(n-k, k)=$ $=C_n^k$(žr. (8) formulę iš 9 skyrelio).

(15) formulės įrodymą nepakeitus galima taikyti kelių dėmenų atvejui. Samprotaudami taip pat, kaip ir anksčiau, įsitikiname, kad

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\Sigma P(n_1, n_2, \ldots, n_m)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{n_m}; \qquad (16)$$

dešinėje lygybės pusėje sumuojama pagal visus kortežus $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, kurių $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$.

(16) formulė vadinama *polinomine*.

19 pavyzdys. Parašykime laipsnio $(a+b+c)^3$ dėstinį.

Sprendimas. Pagal (16) polinominę formulę gauname:

$$(a+b+c)^3=\Sigma P(n_1, n_2, n_3)a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3};$$

čia $n_1+n_2+n_3=3$. Kortežai (n_1, n_2, n_3), tenkinantys šią sąlygą, yra tokie:

$$(3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1),$$
$$(0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, 1, 1).$$

Iš viso jų yra 10. Atitinkamai gauname 10 dėmenų sumą:

$$(a+b+c)^3=\frac{3!}{3!0!0!}a^3b^0c^0+\frac{3!}{0!3!0!}a^0b^3c^0+\frac{3!}{0!0!3!}a^0b^0c^3+$$
$$+\frac{3!}{2!1!0!}a^2bc^0+\frac{3!}{2!0!1!}a^2b^0c+\frac{3!}{0!2!1!}a^0b^2c+\frac{3!}{1!2!0!}ab^2c^0+$$
$$+\frac{3!}{1!0!2!}ab^0c^2+\frac{3!}{0!1!2!}a^0bc^2+\frac{3!}{1!1!1!}abc=a^3+b^3+c^3+3a^2b+$$
$$+3a^2c+3b^2c+3ab^2+3ac^2+3bc^2+6abc.$$

20 pavyzdys. Išskaidykime dauginamaisiais daugianarį

$$a^3+b^3+c^3-3abc.$$

Sprendimas. Remkimės ankstesniame pavyzdyje rastu $(a+b+c)^3$ dėstiniu. Gausime:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+$$
$$+b^2c+bc^2+3abc)=(a+b+c)^3-3((a^2b+ab^2+abc)+$$
$$+(a^2c+ac^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc))=(a+b+c)^3-$$
$$-3(a+b+c)(ab+ac+bc)=(a+b+c)((a+b+c)^2-$$
$$-3(ab+ac+bc))=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Pratimai

30. Raskite $(a+b+c+d)^4$ dėstinio narių skaičių.
31. Raskite $(1+2x+3x^2)^{10}$ dėstinio koeficientą prie x^4.

16. Mažosios Ferma teoremos įrodymas. 6 skyrelyje (p. 16), remdamiesi indukcija, suformulavome mažąją Ferma teoremą: *jei p — pirminis skaičius, tai n^p-n su bet kuriuo $n\in N$ dalijasi iš p.* Dabar jau galime įrodyti šią teoremą matematinės indukcijos metodu.

Kai $n=1$, teiginys teisingas, nes $1^p-1=0$ dalijasi iš p. Tarkime, kad jau įrodyta, jog k^p-k dalijasi iš p. Įrodysime, kad skaičius $(k+1)^p-(k+1)$ taip pat dalijasi iš p. Nagrinėkime skirtumą

$$(k+1)^p-(k+1)-(k^p-k).$$

Pagal Niutono binomo formulę išskleidę $(k+1)^p$, gausime:

$$(k+1)^p-(k+1)-(k^p-k)=C_p^0k^p+C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+\ldots+$$
$$+C_p^{p-1}k+C_p^p-k-1-k^p+k=C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+\ldots+C_p^{p-1}k; \quad (17)$$

kai $1\leqslant i<p$,

$$C_p^i=\frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot i}.$$

Kadangi p — pirminis skaičius, tai jis nesidalija nė iš vieno skaičių 1, 2, ..., i, kurie parašyti vardiklyje. Todėl C_p^i dalijasi iš p,

kai $1 \leqslant i < p$. Tačiau tada (17) lygybės dešinės pusės dėmenys dalijasi iš p, taigi ir kairė pusė dalijasi iš p. Kadangi pagal indukcijos prielaidą $k^p - k$ dalijasi iš p, tai ir $(k+1)^p - (k+1)$ dalijasi iš p.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, tvirtiname, kad $n^p - n$ dalijasi iš pirminio skaičiaus p su visais $n \in N$.

Pratimai

32. Kiek reikia išleisti žodynų, kad galėtume tiesiogiai versti iš lietuvių, anglų, vokiečių, prancūzų ir ispanų kalbų į bet kurią iš tų kalbų?

33. Dviejose sporto draugijose yra po 50 fechtuotojų. Iš tų draugijų reikia išskirti po 3 fechtuotojus dalyvauti varžybose. Kiek yra būdų tai padaryti?

34. Fortepijono būrelį lanko 10 žmonių, raiškiojo skaitymo būrelį — 15, vokalinį būrelį — 12 ir fotografijos būrelį — 20 žmonių. Kiek yra būdų sudaryti brigadą iš trijų pianistų, keturių skaitovų, penkių dainininkų ir vieno fotografo?

35. 80 žmonių susirinkimas renka pirmininką, sekretorių ir tris redakcinės komisijos narius. Kiek yra būdų tai atlikti?

36. Susirinkime turi kalbėti 5 žmonės: A, B, C, D, E. Kalbėtojas B turi kalbėti iš karto po A. Kiek yra būdų kalbėtojus surašyti į sąrašą?

37. Kiek nelyginių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 3 694 skaitmenų, jeigu kiekvieną skaitmenį galima vartoti ne daugiau kaip vieną kartą?

38. Vienas mokinys turi 7 matematikos knygas, kitas — 9 knygas. Kiek yra būdų jiems pasikeisti dviem knygomis?

39. Penki berniukai ir trys mergaitės žaidžia šachmatais. Kiekvienoje komandoje turi būti nors po vieną mergaitę. Kiek yra būdų pasiskirstyti į dvi komandas?

40. Iš 7 vyrų ir 4 moterų grupės reikia taip išrinkti 6 žmones, kad iš jų būtų ne mažiau kaip dvi moterys. Kiek yra būdų tai padaryti?

41. Mama turi 10 obuolių ir 5 kriaušes. Penkiolika dienų kasdien ji vaikui duoda po vieną vaisių. Kiek yra būdų padalyti vaisius?

42. Mama turi du obuolius, tris kriaušes ir keturis apelsinus. Penkias dienas kasdien ji duoda po vieną vaisių. Kiek yra būdų paskirstyti vaisius?

43. Kiek skaičių, mažesnių už milijoną, galima užrašyti skaitmenimis 9, 8 ir 0 (skaičiai negali prasidėti nuliu)?

44. Kiek keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 123 153 skaitmenų?

45. Kiek yra būdų už apskrito stalo susodinti 5 vyrus ir 5 moteris, kad vienos lyties asmenys nesėdėtų greta?

46. Fotografuojama aštuonių vyrų ir šešių moterų grupė. Fotografas nori į pirmą eilę taip pasodinti dvi moteris ir tris vyrus, kad vienos lyties asmenys nesėdėtų greta. Kiek yra būdų susodinti pirmąją eilę?

47. 30 žmonių balsuoja už penkis pasiūlymus. Kiekvienas balsuoja tik už vieną pasiūlymą ir atsižvelgiama tik į balsų skaičių už kiekvieną pasiūlymą. Kiek yra būdų pasiskirstyti balsams?

Atsakymai

1. 560. **2.** 81. **3.** 5^6. **4.** $2^{10}=1024$. **5.** m^k. **6.** 720. **7.** 60; 36. **8.** 700. **9.** 1800. **10.** $6!=720$. **11.** 11!. **12.** 6!, 10!, 11!. **13.** 230 300; 18 424. **14.** 968. **15.** $\frac{30!}{(10!)^3}$. **16.** C_n^2. **17.** 90; $\frac{n(n-3)}{2}$. **18.** $C_{10}^{2}\cdot \overline{C}_{7}^{2}=945$. **19.** $\frac{10!}{2!3!2!}$. **20.** $\frac{20!}{8!7!5!}$. **21.** $\overline{C}_{10}^{12}=C_{21}^{12}$. **22.** 28. **23.** 134. **24.** $(x+1)^7=x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1$. **25.** 144. **26.** 330. **27.** $314\,925\cdot 10^5$. **28.** C_{12}^6. **30.** 34. **31.** 16 725. **32.** 20. **33.** $(C_{50}^3)^2$. **34.** $C_{10}^3\cdot C_{15}^4\cdot C_{12}^5\cdot C_{20}^1$. **35.** $A_{80}^2\cdot C_{78}^3$. **36.** 24. **37.** 32. **38.** 756. **39.** 90. **40.** 371. **41.** 3003. **42.** 1260. **43.** 728. **44.** 255. **45.** 2880. **46.** 8400. **47.** 46 376.

TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

> Tikimybių teorija — matematikos šaka, padedanti iš vienų atsitiktinių įvykių tikimybių rasti tikimybes kitų atsitiktinių įvykių, vienaip ar kitaip susijusių su pirmaisiais.
>
> (Didžioji tarybinė enciklopedija, 3 leid., 4 t., p. 540.)

Įžanga. Uždaviniuose, kuriuos sprendžiate per fizikos ir matematikos pamokas, dažniausiai numatomas vienareikšmis veiksmo rezultatas. Pavyzdžiui, išleistas iš rankų akmuo pradeda kristi pastoviu pagreičiu. Akmens padėtį galima apskaičiuoti bet kuriuo laiko momentu. Tačiau yra daug uždavinių, kurie turi vis didesnę reikšmę įvairiems mokslams ir jų taikymui technikoje bei liaudies ūkyje, o jų veiksmo rezultatas nėra vienareikšmiškai apibrėžtas. Išnagrinėkime paprasčiausią pavyzdį. Išmetus monetą, neįmanoma pasakyti, kuria puse į viršų ji nukris — herbu ar skaičiumi. Čia veiksmo — monetos metimo — rezultatas vienareikšmiškai nenustatytas. Galima pagalvoti, kad tokiuose uždaviniuose iš viso nieko konkretaus pasakyti negalima. Tačiau lošimo praktika rodo ką kita: kai metimų skaičius didelis, maždaug pusę kartų atsiverčia herbas, o kitą pusę — skaičius. O tai jau tam tikras dėsningumas. Būtent tokie dėsningumai ir tiriami tikimybių teorijoje. Beje, keičiasi ir pats uždavinio formulavimas. Mus domins ne atskiro bandymo rezultatas, o rezultatas, gautas pakartojus bandymą daug kartų. Trumpai sakoma, kad tikimybių teorija nagrinėja masinių atsitiktinių įvykių dėsningumus.

Pateikėme monetos metimo pavyzdį, nes tai pati paprasčiausia ir visiems gerai pažįstama situacija, kurioje veiksmo rezultatas nėra vienareikšmiškai apibrėžtas. Tačiau nereikia manyti, kad tikimybių teorijoje nagrinėjami tik tokie lošimų uždaviniai.

Panagrinėkime vieną iš svarbiausių liaudies ūkio uždavinių — telefono tinklo sudarymą rajone, respublikoje. Kyla klausimas: kiek reikia nutiesti telefono linijų į rajono centrą? Tai taip pat tikimybinis uždavinys. Iš anksto negalima pasakyti, kiek kartų ir kurią valandą bus skambinama į rajono centrą. Jeigu telefono linijų bus nutiesta per mažai, tai į centrą nebus galima prisiskambinti. Jeigu jų bus išvesta per daug, tai prisiskambinti bus lengva, bet daug nutiestų linijų nebus užimtos, t. y. ryšio organizavimo išlaidos bus per didelės.

Analogiška padėtis organizuojant darbą uoste. Čia reikia nuspręsti. kiek įsigyti krovimo įrenginių. Tolimųjų reisų laivai negali laikytis tikslaus tvarkaraščio. Todėl laivų atplaukimas į uostą taip pat priklauso atsitiktinių įvykių kategorijai. Taigi ir uosto

įrengimo planavimas turi remtis tikimybių teorijos išvadomis. Jeigu įrenginių mažai, tai laivai ilgai lauks iškrovimo eilėje ir ilgai bus iškraunami, o už tai reikės brangiai mokėti. Jeigu įrenginių labai daug, tai eilės nebus ir iškraunama bus labai greitai. Tačiau tada didelė uosto įrenginių dalis prastovės, t. y. uosto įrengimo lėšos bus pereikvotos.

Dar vienas tikimybinio uždavinio pavyzdys. Įsivaizduokite, kad mokykloje suorganizuotos tarpklasinės varžybos, o jums reikia nustatyti, kuri klasė geriau parašė ministerijos kontrolinį darbą iš algebros. Dėl to užtenka išvesti kiekvienos klasės vidutinį pažymį (apskaičiuoti klasėje gautų pažymių aritmetinį vidurkį) ir juos palyginti. Tada vietos varžybose pasiskirstys pagal gautus vidutinius pažymius. Kyla klausimas, į kelis ženklus po kablelio būtina atsižvelgti taip lyginant. Pasirodo, kad 30—40 žmonių klasėms atsižvelgiama tik į dešimtąsias, t. y. vidutinius klasės pažymius reikia apskaičiuoti 0,1 tikslumu. Na, o jeigu norėsime analogiškai palyginti mokyklas, t. y. remdamiesi vidutiniu mokyklos pažymiu, norėsime nustatyti, kuri mokykla geriau parašė ministerijos kontrolinį darbą iš algebros? Kiek tada imti ženklų, apskaičiuojant vidutinį pažymį? Pasirodo, kad atsižvelgti į šimtąsias būtų galima tik tada, kai vienos mokyklos kontrolinių darbų skaičius siekia 2 500.

Daug tikimybinių uždavinių kyla, organizuojant eksperimentus ir planuojant. Pavyzdžiui, kiek bandymų reikia atlikti, kad iš jų padarytos išvados būtų patikimos? Jeigu bandymų per mažai, tai, žinoma, kyla abejonių: galbūt bandymų rezultatai — atsitiktinis sutapimas? Aišku, kuo daugiau bandymų, tuo patikimesnės iš jų padarytos išvados. Tačiau ties tam tikru bandymų skaičiumi tenka apsistoti — negali jų būti be galo daug. Juk kiekvienas bandymas — tai išleisti pinigai, todėl neturi būti nepateisinamų išlaidų. Tikimybių teorija padeda ir čia. Yra daug būdų nustatyti, koks turi būti bandymų skaičius, kad iš eksperimentų padarytos išvados būtų pakankamai patikimos.

Panašių uždavinių atsiranda vis daugiau ir daugiau. Juos sprendžiant, reikia didelio teorinio pasirengimo. Todėl jų neliesime. Mūsų uždaviniai bus daugiausia lošimų pobūdžio. Juose daug paprasčiau pastebėti tikimybinius dėsningumus, jie įprastesni. Jau ir iš jų galima suvokti pagrindinius tikimybinius dėsningumus ir tikimybinių uždavinių formulavimo ir sprendimo metodiką.

Epigrafe pateiktas tikimybių teorijos apibrėžimas. Jame paminėta nemažai sąvokų: atsitiktinis įvykis, atsitiktinio įvykio tikimybė, atsitiktinių įvykių ryšys. Visas šias sąvokas reikia apibrėžti ir išsiaiškinti. Tai dabar ir padarysime.

1. Atsitiktiniai įvykiai. Tikimybių teorijoje (kaip ir kiekviename kitame moksle) nagrinėjama ne visa įvairiapusė ir sudėtinga tikrovė, o tik viena tam tikra jos pusė. Sudaroma tam tikra sche-

ma (arba modelis), kuri geriau ar blogiau atspindi mus dominančią tikrovės sritį. Ta schema ir nagrinėjama. Pavyzdžiui, geometrija nagrinėja figūrų — taškų, tiesių ir pan.— savybes. Realioje tikrovėje tokių figūrų nėra. Todėl tiriame modelius — kurios nors tikrovės srities modeliavimo, schematizavimo, abstrahavimo rezultatus. Fizikoje nagrinėjamas materialusis taškas, idealiosios dujos ir pan. Tai taip pat tam tikrų tikrovės sričių vaizdavimas modeliu — gamtoje materialiųjų taškų ir idealiųjų dujų nėra.

Tikimybių teorijoje nagrinėjamas toks realios tikrovės reiškinių modelis: atliekamas *bandymas,* kurio rezultatai yra *atsitiktiniai įvykiai* (kartais sakoma tiesiog — įvykiai). Pavyzdžiui, metėme monetą ir pasižiūrėjome, kaip ji atsivertė — tai bandymas. Šiame bandyme galėjo atsiversti herbas — tai vienas įvykis, bet galėjo atsiversti ir skaičius — tai kitas įvykis. Kadangi herbas atsiverčia atsitiktinai, tai jo atsivertimas — atsitiktinis įvykis. Įvykius susitarta žymėti didžiosiomis raidėmis: A, B, C ir pan. Pavyzdžiui, monetos metimo bandyme įvykį „atsivertė herbas" natūralu žymėti raide H. Tada rašome: $H=$„atsivertė herbas". Analogiškai įvykis „atsivertė skaičius" žymimas raide S.

Išnagrinėkime dar vieną bandymą, šiek tiek turtingesnį įvykių negu bandymas su monetos metimu,— lošimo kauliuko metimą. Bandymas yra toks. Lošimo kauliukas (kubelis, kurio sienose atitinkamai pažymėtos 1, 2, 3, 4, 5 ir 6 akutės) metamas ant stalo ir žiūrima, kiek atsivertė akučių (viršutinėje sienoje). Čia galimi tokie įvykiai:

$Q_1=$„atsivertė 1 akutė", $Q_4=$„atsivertė 4 akutės",
$Q_2=$„atsivertė 2 akutės", $Q_5=$„atsivertė 5 akutės",
$Q_3=$„atsivertė 3 akutės", $Q_6=$„atsivertė 6 akutės".

Tačiau galima nagrinėti ir kitus įvykius, susijusius su lošimo kauliuko metimo bandymu:

$Q_p=$„atsivertusių akučių skaičius pirminis",
$Q_{3k}=$„atsivertusių akučių skaičius dalijasi iš 3",
$Q_l=$„atsivertusių akučių skaičius lyginis",
$Q_n=$„atsivertusių akučių skaičius nelyginis" ir pan.

Jau šituose paprastuose bandymuose galime pastebėti, jog įvykiai Q_l ir Q_n negali įvykti vienu metu. Tokį ypatingą sąryšį tarp įvykių galima rasti bet kokiame bandyme, ir jis turi specialų pavadinimą.

Apibrėžimas. *Du įvykiai vadinami nesutaikomais, jeigu jie nagrinėjamame bandyme negali įvykti vienu metu. Įvykiai, kurie nagrinėjamame bandyme gali įvykti kartu, vadinami sutaikomais.*

Pavyzdžiui, bandyme, kai metamas lošimo kauliukas, įvykiai Q_l ir Q_p sutaikomi. Tikrai, sakykime, kad atsivertė 2 akutės. Skaičius 2 lyginis, todėl įvyko įvykis Q_l. Kita vertus, skaičius 2 pirminis, todėl įvyko įvykis Q_p. Lygiai taip pat įvykiai Q_3 ir Q_p

sutaikomi. Tačiau tarp įvykių poros Q_3 ir Q_p sutaikomumo ir įvykių poros Q_l ir Q_p sutaikomumo galima pastebėti esminį skirtumą. Pirmoje poroje iš to, kad įvyko įvykis Q_3, automatiškai išplaukia, kad įvyko ir įvykis Q_p. Antroje poroje to nėra. Iš tikrųjų, sakykime, atsivertė 4 akutės, t. y. įvyko įvykis Q_l. Tada įvykis Q_p neįvyko, nes 4 nėra pirminis skaičius. Taigi antroje poroje iš to, kad įvyko vienas iš sutaikomų įvykių, dar neišplaukia, kad automatiškai įvyko ir kitas.

Apibrėžimas. *Sakoma, kad įvykis A palankus įvykiui B (ir rašoma $A \subset B$), jeigu iš to, kad įvyko įvykis A, išplaukia, jog įvyko įvykis B. Jeigu iš to, kad įvyko įvykis A, dar neišplaukia, jog įvyko įvykis B, tai sakoma, kad įvykis A nepalankus įvykiui B (ir rašoma $A \not\subset B$).*

Štai bandyme, kai metamas lošimo kauliukas, $Q_3 \subset Q_p$, $Q_l \not\subset Q_p$.

Pažymėsime dar vieną labai svarbią aplinkybę. Bandyme, kai metamas lošimo kauliukas, įvykiai Q_1, Q_2, ..., Q_6 atlieka lyg ir kokį ypatingą vaidmenį. Šio ypatingo vaidmens esmė yra ta, kad bandyme vienas šių įvykių būtinai įvyksta, ir bet kurie du iš jų yra nesutaikomi.

Apibrėžimas. *Nagrinėjamo bandymo įvykių aibė, kai vienas jų bandyme būtinai įvyksta, o bet kurie du iš jų nesutaikomi, vadinama to bandymo elementariųjų įvykių (arba baigčių) aibe, o kiekvienas tos aibės įvykis vadinamas nagrinėjamo bandymo elementariuoju įvykiu, arba jo baigtimi.*

Pavyzdžiui, bandyme, kai metamas lošimo kauliukas, įvykiai Q_1, Q_2, ..., Q_6 sudaro šio bandymo baigčių aibę. Pabrėšime, kad to paties bandymo galima nagrinėti įvairias baigčių aibes. Minėtame bandyme galima nagrinėti baigčių aibę, sudarytą iš dviejų baigčių — Q_l ir Q_n. Iš tikrųjų, šie įvykiai nesutaikomi, o atlikus bandymą, vienas iš jų būtinai įvyksta. Nuo to, kaip pasirinkta elementariųjų įvykių aibė, priklauso, sunkiau ar lengviau bus spręsti nagrinėjamą tikimybinį uždavinį: pasirinkus vykusiai, sprendimas gerokai supaprastėja, o pasirinkus nevykusiai, sprendimas arba pasunkėja, arba pasidaro visai nebeįmanomas.

Taigi susipažinome su atsitiktiniais įvykiais ir paprasčiausiais jų ryšiais. Išsamiau apie tai bus kalbama 3 skyrelyje.

Šiame skyrelyje išnagrinėta bandymo atlikimo schema kaip atskirą atvejį apima ir įprastinius uždavinius, kai veiksmų rezultatas apspręstas vienareikšmiškai.

Pratimai

1. Išvardytuose bandymuose nurodykite sutaikomus ir nesutaikomus įvykius, nustatykite, koks įvykis kokiam palankus:

a) Bandymas — vienos monetos metimas; įvykiai: S= „atsivertė skaičius" ir H= „atsivertė herbas".

b) Bandymas — dviejų monetų metimas; įvykiai: A=„bent viena moneta atsivertė skaičiumi", B=„bent viena moneta atsivertė herbu", C=„abi monetos atsivertė skaičiumi", D=„abi monetos atsivertė herbu".

c) Bandymas — du šūviai į taikinį: įvykiai: A=„nė vieno pataikymo", B=„vienas pataikymas", C=„du pataikymai", D=„nėra šūvio pro šalį".

d) Bandymas — domino kauliuko traukimas; įvykiai: A=„ištrauktos 6 akutės", B=„ištrauktos 3 akutės", C=„ištrauktame kauliuke 3 akutės ir tuščia".

2. Ar 1b) pratime įvykiai A ir B sudaro bandymo baigčių aibę?

3. Ar 1b) pratime įvykiai C ir D sudaro bandymo baigčių aibę?

4. Kokį trečią įvykį E reikia pridėti prie įvykių C ir D 1b) pratime, kad gautume baigčių aibę?

5. Nurodykite bandymo baigčių aibę 1c) pratime.

2. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas. „Tikimybė — tai matematinė, skaitinė charakteristika, apibūdinanti kurio nors konkretaus įvykio galimybės laipsnį, kai konkrečios sąlygos jam įvykti gali būti pakartotos neribotą skaičių kartų" (A. K o l m o g o r o v a s. Didžioji tarybinė enciklopedija, 3 leidimas, 4 t., p. 544). Enciklopedijoje pateiktas aprašomasis įvykio tikimybės apibrėžimas. Duoti matematiškai korektišką apibrėžimą įmanoma tik giliai išstudijavus šiuolaikinę matematiką. Vis dėlto pateiktame apibrėžime atsispindi visi esminiai šios sąvokos momentai. Atkreipsime dėmesį į vieną apibrėžimo vietą: bandymas (t. y. konkrečios sąlygos, kuriomis įvyksta nagrinėjamas įvykis) gali būti pakartotas neribotą skaičių kartų (bent jau teoriškai). Jeigu bandymo negalima pakartoti neribotą skaičių kartų, tai negalima kalbėti apie šiame bandyme įvykstančių įvykių tikimybę. Tai pirmosios apibrėžimo dalies paaiškinimas. Ką reiškia įvykio „galimybės laipsnis" tame bandyme? Ką reiškia, kad tas laipsnis apibūdinamas skaičiumi p? Tai reiškia štai ką: jeigu bandymas bus pakartotas n kartų, tai įvykis įvyks apytiksliai pn kartų. Jeigu, tai atlikus, įvykis įvyko m kartų, tai įvykio dažnis — skaičius $\frac{m}{n}$ — yra apytiksliai lygus tikimybei p, $\frac{m}{n} \approx p$, ir šios lygybės tikslumas bus tuo didesnis, kuo didesnis n. Kitaip tariant, ryšys, kuris bandymą sieja su įvykiu ir apibūdinamas skaičiumi p — įvykio tikimybe tame bandyme,— išryškėja tik daug kartų kartojant tą bandymą.

Įvykio tikimybės sąvoka dažniausiai pradedama nagrinėti nuo paties paprasčiausio atskiro atvejo — vadinamojo klasikinio apibrėžimo. Jis remiasi įvykių vienodo tikėtinumo sąvoka.

Pradėsime nuo pavyzdžių. Bandyme, kai metama moneta, įvykiai H=„atsivertė herbas" ir S=„atsivertė skaičius", aišku, yra

vienodai tikėtini. Taip galvojame todėl, kad moneta yra simetriška ir vienalytė. Bandyme, kai metamas lošimo kauliukas, įvykiai $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ taip pat vienodai tikėtini. Taip yra, kadangi kauliukas pagamintas iš vienalytės medžiagos, o jo forma simetriška. Taigi įvykių vienodas tikėtinumas paprastai nustatomas iš to, kad įvykio sąlygos simetriškos nagrinėjamų įvykių atžvilgiu. Čia simetrija suprantama plačiąja to žodžio prasme: ir geometrinė simetrija, ir fizikinė simetrija (pavyzdžiui, kauliuko ar monetos medžiagos vienalytiškumas) ir t. t. Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti keista, kad, įvesdami įvykių vienodo tikėtinumo sąvoką, kaip ir nutolstame nuo matematinės terminologijos ir remiamės aprašymais bei pavyzdžiais. Žvilgtelėkime dar kartą į epigrafą, pateiktą tikimybių teorijos apibrėžimą. Jame pasakyta: „iš vienų atsitiktinių įvykių tikimybių rasti tikimybes kitų atsitiktinių įvykių ...". Žodžiu, kad būtų galima pradėti spręsti uždavinį tikimybių teorijos priemonėmis, uždavinyje turi būti jau nurodytos tam tikrų įvykių tikimybės. Iš kurgi tos tikimybės? Jas pateikia konkretūs mokslai, kuriuose ir atsirado nagrinėjamasis tikimybinis uždavinys. Ir čia dažnai pagrindinis vaidmuo tenka ne matematiniams, o šio mokslo samprotavimams. Įvykių vienodo tikėtinumo sąvoka — tai viena iš pradinių tikimybių nurodymo formų.

Dabar galime suformuluoti atsitiktinio įvykio tikimybės klasikinį apibrėžimą.

Apibrėžimas. *Sakykime, bandymo baigčių aibę sudaro n vienodai tikėtinų baigčių. Jeigu m iš jų yra palankios įvykiui A, tai įvykio A tikimybe vadinamas skaičius*

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Vėliau (11 skyrelyje) matysime, kad toks atsitiktinio įvykio tikimybės apibrėžimas siejasi su tuo, kas pasakyta apie dažnio ir įvykio tikimybės ryšį.

1 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad, metant lošimo kauliuką, atsivers lyginis akučių skaičius?

Sprendimas. Bandymo „lošimo kauliuko metimas" turime 6 vienodai tikėtinas baigtis: įvykius $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$. Mus domina įvykio Q_l tikimybė. Šiam įvykiui palankios trys bandymo baigtys: įvykiai Q_2, Q_4 ir Q_6. Todėl $n=6$, $m=3$, o ieškomoji tikimybė

$$P(Q_l) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2 pavyzdys. Metamos dvi monetos. Kokia tikimybė, kad abi monetos atsivers herbu?

Sprendimas. Iš pradžių prašyte prašosi baigčių aibė, sudaryta iš trijų įvykių (čia bandymas — dviejų monetų metimas): „abi monetos atsivertė herbu" $= H$, „abi monetos atsivertė skai-

čiumi“ $=S$ ir „viena moneta atsivertė herbu, kita moneta atsivertė skaičiumi“ $=A$. Tačiau intuityviai aišku, kad tai nėra vienodai tikėtini įvykiai — galimybių įvykti įvykiui A daugiau. Norėdami vienodai tikėtinų baigčių, bandymą šiek tiek papildykime, nekeisdami uždavinio tikimybinės struktūros. Būtent, imkime vieną varinę, o kitą sidabrinę monetą. Dabar galima išskirti vienodai tikėtinas bandymo baigtis — tai įvykiai H, S, $A_1=$ „sidabrinė moneta atsivertė herbu, varinė moneta atsivertė skaičiumi“ ir A_2 — „sidabrinė moneta atsivertė skaičiumi, varinė moneta atsivertė herbu“. Šie keturi įvykiai jau vienodai tikėtini, nes bandymo sąlygos simetriškos jų atžvilgiu. Jie taip pat sudaro nagrinėjamo bandymo baigčių aibę. Dabar jau pasiruošėme remtis tikimybių teorija (iki šiol uždavinio sąlygomis rėmėmės, aiškindamiesi tam tikras pagrindines, pradines tikimybes; šiuo atveju tai buvo vienodai tikėtinų bandymo baigčių išskyrimas). Vienodai tikėtinų bandymo baigčių yra 4, t. y. $n=4$. Mus domina įvykio H tikimybė. Jam palanki tik viena baigtis, t. y. $m=1$. Taigi ieškomoji tikimybė

$$P(H)=\frac{1}{4}.$$

3 pavyzdys. Iš septynių vienodų bilietų vienas laimėjęs. Septyni žmonės paeiliui atsitiktinai ima (ir negrąžina) po vieną bilietą. Ar tikimybė ištraukti laimėjusį bilietą priklauso nuo žmogaus numerio eilėje?

Sprendimas. Aprašysime šio pavyzdžio matematinį modelį. Sunumeruokime visus bilietus, pradėdami laimėjusiu. Po bandymo bilietus bus pasiskirstę žmonės, kurie eilėje buvo užėmę konkrečias vietas. Taip 7 bilietų aibė sutvarkoma: pirmoje vietoje atsiduria bilietas, kurį ištraukė pirmasis eilėje stovėjęs žmogus; antroje vietoje — bilietas, kurį ištraukė antrasis eilėje stovėjęs žmogus ir t. t. Taigi bandymo baigtis yra kuris nors kėlinys be pasikartojimų iš 7 bilietų. Todėl tų baigčių skaičius yra $n=7!$ Kadangi bilietai traukiami atsitiktinai, tai visos baigtys yra vienodai tikėtinos. Mus domina įvykio $A=$ „žmogus, stovėjęs eilės k-toje vietoje, ištraukė laimėjusį bilietą“. Šiam įvykiui palankios baigtys, kai gaunami kėliniai, kurių k-toje vietoje yra laimėjęs bilietas, o kitas šešias vietas užima bet kaip išdėstyti šeši likę nelaimėję bilietai; jų yra $m=6!$ Todėl

$$P(A)=\frac{6!}{7!}=\frac{1}{7}.$$

Matome, kad tikimybė ištraukti laimėjusį bilietą nepriklauso nuo eilės numerio.

4 pavyzdys. Metami du lošimo kauliukai ir suskaičiuojama atsivertusių akučių suma. Kas labiau tikėtina: gauti sumą 7 ar 8?

Sprendimas. Šio uždavinio bandymas yra toks: metami du lošimo kauliukai ir suskaičiuojama atsivertusių akučių suma. Bandymo baigtys yra tokios: „atsivertė suma 2“, „atsivertė suma 3“ ir t. t., „atsivertė suma 12“. Tačiau tai nėra vienodai tikėtinos baigtys. Iš tikrųjų, sumą 2 galima gauti tik vienu būdu: $2=1+1$, o sumą 4 — 2 būdais: $4=1+3$ ir $4=2+2$, t. y. didesnės galimybės, kad suma bus 4. Bandykime patikslinti bandymo baigčių pasirinkimą ir nagrinėkime tokius įvykius: „vieno kauliuko atsivertė k akučių, kito — p akučių“: $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ir $p=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Tačiau tai irgi nevienodai tikėtinos bandymo baigtys: intuicija sako, kad vienodo taškų skaičiaus atsivertimas mažiau tikėtinas, negu skirtingo. Vienodai tikėtinos baigtys bus, papildžius uždavinį tiek, kad nesikeistų jo tikimybinė pusė. Būtent, kauliukus nudažykime skirtingomis spalvomis — raudona ir mėlyna. Šis niuansas mums padeda pagaliau išskirti nagrinėjamo bandymo vienodai tikėtinas baigtis. Tai tokie įvykiai: „raudonojo kauliuko atsivertė k akučių, mėlynojo — p akučių“ $=(k; p)$. Kadangi kauliukai skiriasi tik spalva, tai aišku, kad tie įvykiai vienodai tikėtini; be to, jie sudaro bandymo baigčių aibę. Reikia rasti visų baigčių skaičių. Jų yra 36, nes kiekviena iš 6 raudonojo kauliuko sienų gali atsiversti kartu su bet kuria mėlynojo kauliuko siena. Dabar suskaičiuokime, kiek yra nagrinėjamiems įvykiams palankių baigčių. Įvykiui „atsivertusių akučių suma lygi 7“ $=A$ palankios tokios 6 baigtys: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2) ir (6; 1). Todėl

$$P(A)=\frac{6}{36}.$$

Įvykiui „atsivertusių taškų suma lygi 8“ $=B$ palankios yra tokios 5 baigtys: (2; 6), (3; 5); (4; 4), (5; 3), (6; 2). Todėl

$$P(B)=\frac{5}{36}.$$

Matome, kad 7 taškų atsivertimas yra labiau tikėtinas įvykis negu 8 taškų atsivertimas.

Įdomu pažymėti, kad šį faktą pastebėjo lošėjai kauliukais. Bandymai jį paaiškinti (ir draudimo bei panašių uždavinių sprendimas) padėjo atsirasti matematinei teorijai — tikimybių teorijos pradmenims.

5 pavyzdys. Dėžėje yra 20 čiupinėjant vienodų rutulių. Iš jų 12 baltų ir 8 juodi. Atsitiktinai išimamas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad tai bus baltas rutulys? (Posakio „atsitiktinai išimamas rutulys“ tiksli prasmė bus paaiškinta sprendžiant.)

Sprendimas. Uždavinyje nagrinėjamas toks bandymas: iš dėžės atsitiktinai imamas rutulys ir pažiūrima jo spalva. Iš karto prašyte prašosi dviejų baigčių aibė: $J=$„išimtasis rutulys juodas“ ir $B=$„išimtasis rutulys baltas“. Tačiau šios baigtys nevienodai tikėtinos, nes baltų rutulių daugiau, taigi ir galimybių

išimti baltą rutulį daugiau. Siekdami išskirti šiame bandyme vienodai tikėtinų baigčių aibę, įtraukime į bandymą papildomą elementą, nekeičiantį uždavinio tikimybinės struktūros: būtent, sunumeruokime visus rutuliukus. Baltiems rutuliams priskirkime numerius nuo 1 iki 12, o juodiems — nuo 13 iki 20. Įvykiai „išimtas k-tasis rutulys" jau vienodai tikėtini, nes pačiupinėjus rutuliai nesiskiria ir imami atsitiktinai. Be to, šie 20 įvykių sudaro bandymo baigčių aibę. Todėl $n=20$, o mums dominančiam įvykiui B palankūs pirmieji 12 įvykių, t. y. $m=12$. Taigi

$$P(B)=\frac{12}{20}=0{,}6.$$

Tikslį posakio „atsitiktinai ištraukiamas rutulys" prasmė yra ta, kad minėti įvykiai A_k yra vienodai tikėtini.

6 pavyzdys. Dėžėje yra 20 čiupinėjant vienodų rutulių, iš jų 12 baltų ir 8 juodi. Atsitiktinai išimami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie abu balti? kad jie skirtingų spalvų?

Sprendimas. Siekdami išskirti vienodai tikėtinus įvykius, visus rutulius vėl sunumeruokime taip pat. Įvykiai „išimtų rutulių numeriai k ir p" $=(k, p)$, žinoma, vienodai tikėtini ir yra bandymo baigtys. Tų įvykių skaičius lygus 20 elementų aibės dvielemenčių poaibių skaičiui, t. y. $n=C_{20}^2$. Įvykiui $B=$„abu rutuliai balti" palankios baigtys, kai k ir p kinta nuo 1 iki 12 ir yra skirtingi; jų yra tiek pat, kiek ir 12 elementų aibės dvielemenčių poaibių — $m=C_{12}^2$. Todėl atsakymas į pirmą uždavinio klausimą toks:

$$P(B)=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{12\cdot 11\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 20\cdot 19}=\frac{33}{95}\approx 0{,}35.$$

Spręsdami antrąją uždavinio dalį, nagrinėjame tas pačias baigtis. Įvykiui $A=$„išimtų rutulių spalva skiriasi" palankios yra baigtys, kai vienas numeris k gali būti bet kuris nuo 1 iki 12, o kitas numeris p — bet kuris nuo 13 iki 20. Bet kurią iš 12 minėtų k reikšmių galima derinti su bet kuria iš 8 minėtų p reikšmių. Vadinasi, įvykiui A palankių įvykių skaičius lygus $m=$ $=12\cdot 8$, o

$$P(A)=\frac{12\cdot 8\cdot 1\cdot 2}{20\cdot 19}=\frac{48}{95}\approx 0{,}5.$$

Iš pateiktų pavyzdžių sprendimo matome, kad, išskiriant bandymo vienodai tikėtinų baigčių aibę, į bandymą dažnai tenka įtraukti papildomą momentą, kuris nekeičia bandymo tikimybinės struktūros. Nuo to, kiek vykusiai tai padaryta, priklauso uždavinio sprendimo sudėtingumas.

Sprendžiant pavyzdžius, tekdavo rasti skaičių bandymo baigčių, palankių nagrinėjamam įvykiui. Dėl to reikėjo remtis kombinatorikos sandaugos taisykle. Suformuluokime ir įrodykime ją.

S a n d a u g o s t a i s y k l ė. *Sakykime, duotos dvi aibės:*

$$A=\{a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_k\} \text{ ir } B=\{b_1;\ b_2;\ \dots;b_s\},$$

turinčios atitinkamai k ir s elementų. Tada visų skirtingų porų aibė $(a_i;\ b_j)$, $a_i \in A$, $i=1, 2, \dots, k$, $b_j \in B$, $j=1, 2, \dots, s$ turi ks elementų.

Į r o d y m a s. Visų nagrinėjamų porų aibę suskaidykime į nesikertančius poaibius. Į pirmąjį poaibį įtraukime visas poras su elementu $a_1 \in A$. Tokių porų yra s (tiek yra elementų $b_j \in B$). Į antrąjį poaibį surinkime visas poras su elementu $a_2 \in A$. Jų taip pat bus s. Į poaibį, kurio numeris i, surinkime visas poras su elementu $a_i \in A$. Tų porų skaičius taip pat s. Tokių poaibių bus k, nes tiek yra elementų $a_i \in A$. Vadinasi, iš viso porų yra ks (k poaibių po s porų kiekviename poaibyje). Be to, poaibiai neturi bendrų porų, nes jie skiriasi aibės A elementais, ir nepraleista nė viena iš nagrinėjamų porų. Iš tikrųjų, parinkime bet kurią porą. Į ją įeina elementas $a_i \in A$. Vadinasi, ta pora įeina į poaibį su numeriu i.

7 p a v y z d y s. Vienoje dėžėje yra 8 balti ir 12 raudonų rutulių, kitoje — 15 mėlynų ir 5 juodi rutuliai. Iš kiekvienos dėžės atsitiktinai išimta po vieną rutulį. Kokia tikimybė ištraukti raudoną ir juodą rutulį?

S p r e n d i m a s. Sunumeruokime visus rutulius: $a_1, a_2, \dots, a_8$ — balti, $a_9, a_{10}, \dots, a_{20}$ — raudoni (pirmoje dėžėje), $b_1, b_2, \dots, b_{15}$ — mėlyni, $b_{16}, b_{17}, \dots, b_{20}$ — juodi (antroje dėžėje). Atliekant bandymą, įvyksta įvykiai $(a_i,\ b_j)$ = „išimti rutulys a_i ir rutulys b_j". Šie įvykiai sudaro atliekamojo bandymo baigčių aibę. Kadangi rutuliai imami atsitiktinai, tai tie įvykiai vienodai tikėtini. Pagal sandaugos taisyklę tų įvykių skaičius $n=20 \cdot 20=400$. Mus dominančiam įvykiui palankios bandymo baigtys, kurios tenkina nelygybę: $9 \leqslant i \leqslant 20$ ir $16 \leqslant j \leqslant 20$. Jų skaičius (pagal sandaugos taisyklę) $m=12 \cdot 5=60$. Todėl mus dominančio įvykio tikimybė lygi

$$\frac{m}{n}=\frac{60}{400}=\frac{3}{20}=0{,}15.$$

8 p a v y z d y s. Penkiose vienodose kortelėse parašytos raidės: dviejose kortelėse — raidė E ir trijose kortelėse — raidė S. Atsitiktinai korteles sudedame paeiliui. Kokia tikimybė, kad bus sudėtas žodis SESES?

S p r e n d i m a s. Šiame uždavinyje bandymas yra atsitiktinai sudėti penkias korteles su parašytomis raidėmis. Mus domina įvykio C = „gautas žodis SESES" tikimybė. Išskirsime vienodai tikėtinas baigmes. Sunumeruokime raides taip: E_1, E_2, S_1, S_2, S_3. Dabar, atlikę bandymą, gausime žodį iš sunumeruotų raidžių. Įvykiai „gautas žodis $S_1E_1S_2E_2S_3$" ir „gautas žodis $S_1E_2S_3E_1S_2$" skirtingi, nors tiek vienu, tiek kitu atveju gauname žodį SESES, t. y. įvyksta mus dominantis įvykis C. Parašytieji įvykiai palan-

kūs įvykiui C. Aišku, kad parašytieji įvykiai ir visi galimi analogiški įvykiai yra bandymo vienodai tikėtinos baigtys. Jų skaičius yra lygus 5-elementės aibės kėlinių skaičiui, t. y. $n=5!=120$. Remdamiesi sandaugos taisykle, apskaičiuokime įvykiui C palankių baigčių skaičių.

Išnagrinėkime aibę $B=\{(E_1, E_2); (E_2, E_1)\}$, sudarytą iš sunumeruotų raidžių E dviejų galimų kėlinių, ir aibę A, sudarytą iš sunumeruotų raidžių S šešių galimų kėlinių. Kiekvieną įvykiui C palankią baigtį galima gauti taip: imame aibės B elementą ir dedame raides E (palikdami jų tvarką) į antrą ir ketvirtą žodžio vietą. Likusias vietas užimame kokiu nors aibės A elementu (nekeisdami sunumeruotų raidžių S tvarkos). Taigi kiekvieną baigtį gauname kaip porą: elementas iš B ir elementas iš A. Pagal sandaugos taisyklę tokių baigčių skaičius $m=2\cdot 6=12$. Taigi mus dominančio įvykio tikimybė

$$P(C)=\frac{12}{120}=0{,}1.$$

Sandaugos taisyklė lengvai apibendrinama trims aibėms, keturioms ir t. t.

9 pavyzdys. Dėžėje yra 15 raudonų, 9 mėlyni ir 6 žali, čiupinėjant vienodi rutuliai. Atsitiktinai išimami 6 rutuliai. Kokia tikimybė, kad bus išimti: 1 žalias, 2 mėlyni ir 3 raudoni rutuliai?

Sprendimas. Šiame uždavinyje bandymas yra toks: iš dėžės išimami 6 rutuliai ir pažymima, kiek kokios spalvos rutulių. Mus domina įvykio A=„išimta 1 žalias, 2 mėlyni ir 3 raudoni rutuliai". Išskirsime vienodai tikėtinas baigtis. Sunumeruokime visus rutulius: raudonus — numeriais nuo 1 iki 15, mėlynus — numeriais nuo 16 iki 24, žalius — numeriais nuo 25 iki 30. Nuo to įvykio A tikimybė nepakis. Dabar bandymas tapo toks: iš dėžės išimame 6 rutulius ir užrašome jų numerius, gauname aibę iš šešių numerių, išrinktų iš 30 numerių. Aišku, kad įvykiai „išimtas toks ir toks 6 numerių poaibis iš 30 pirmųjų numerių aibės" sudaro nagrinėjamo bandymo vienodai tikėtinų baigčių aibę. Iš tikrųjų, atliekant bandymą, vienas iš tų įvykių būtinai įvyksta; tie įvykiai kas du nesutaikomi (nes vienu metu ištraukti, pavyzdžiui, numerių rinkinius {1; 3; 15; 21; 23; 30} ir {2; 3; 15; 25; 27; 30} neįmanoma). Tie įvykiai vienodai tikėtini, nes rutuliai traukiami atsitiktinai, todėl kiekvieno numerių rinkinio galimybės vienodos. Tų baigčių skaičius yra lygus 30 elementų aibės šešiaelemenčių poaibių skaičiui, t. y. $n=C_{30}^{6}$. Įvykiui A palankūs tokie numerių rinkiniai, kuriuose yra trys numeriai iš 15 pirmųjų (tai raudonų rutulių numeriai), du numeriai iš sekančių 9 (nuo 16 iki 24) numerių (mėlynų rutulių numeriai) ir vienas numeris iš likusių 6 (nuo 25 iki 30) numerių (žalių rutulių numeriai). Pavyzdžiui, iš anksčiau parašytų dviejų rinkinių pirmas įvykiui A palankus, o antras — ne. Tris numerius iš 15 galima

pasirinkti C_{15}^3 būdų. Du numerius iš 9 galima pasirinkti C_9^2 būdų. Vieną numerį iš 6 galima pasirinkti 6 būdais. Todėl pagal sandaugos taisyklę įvykiui A palankių baigčių aibė turės $m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot 6$ elementų. Mus dominanti tikimybė lygi

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot 6}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145} \approx 0{,}17.$$

Pratimai

1. Ar vienodai tikėtini tokie įvykiai:

a) Bandymas — monetos metimas; įvykiai: „atsivertė herbas" ir „atsivertė skaičius".

b) Bandymas — netaisyklingos (sulenktos) monetos metimas; įvykiai: „atsivertė herbas" ir „atsivertė skaičius".

c) Bandymas — šūvis į taikinį; įvykiai: „nepataikymas" ir „pataikymas".

d) Bandymas — dviejų monetų metimas; įvykiai: A=„atsivertė du herbai", B=„atsivertė du skaičiai" ir C=„atsivertė herbas ir skaičius".

e) Bandymas — lošimo kauliuko metimas; įvykiai: A=„atsivertė ne mažiau kaip trys akutės" ir B=„atsivertė ne daugiau kaip keturios akutės".

f) Bandymas — domino kauliuko paėmimas iš pilno 28 kauliukų komplekto; įvykiai: A=„paimta 6", B=„paimta tuščia".

2. Ar 1 pratime nurodyti įvykiai sudaro atitinkamo bandymo baigčių aibę?

3. Pateikite bandymo su trimis baigtimis pavyzdį.

4. Pateikite pavyzdį bandymo, kuriame galima nurodyti tris kas du nesutaikomus įvykius, nesudarančius bandymo baigčių aibės.

5. Pateikite pavyzdį tokio bandymo ir jo tokių keturių įvykių, kad tie keturi įvykiai nesudarytų bandymo baigčių aibės, bet vienas iš jų bandyme būtinai įvyktų.

6. Metamas lošimo kauliukas. Apskaičiuokite tokių įvykių tikimybes:

a) atsivertė dvi akutės, b) atsivertė penkios akutės, c) atsivertė lyginis akučių skaičius, d) atsivertė pirminis akučių skaičius, e) atsivertusių akučių skaičius dalijasi iš 3.

7. Metamos dvi monetos. Kokia tikimybė vienai monetai atsiversti herbu, o kitai — skaičiumi?

8. Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuokite tokių įvykių tikimybes:

a) atsivertusių akučių skaičių suma lygi: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Gautus rezultatus pavaizduokite koordinačių plokštumoje, abscisių ašyje atidėdami akučių skaičių sumą, o ordinačių ašyje — tos sumos atsivertimo tikimybę;

b) akučių skaičių skirtumas lygus: 0, 1, 2, 3, 4, 5;

c) atsivertusių akučių skaičių suma didesnė už jų sandaugą.

9. Yra penkios 1, 3, 4, 7 ir 9 cm ilgio atkarpos. Raskite tikimybę, kad iš trijų atsitiktinai parinktų atkarpų (iš tų penkių) galima nubraižyti trikampį.

10. Kubas, kurio visos sienos nudažytos, supjaustytas į 1 000 kongruenčių kubelių. Raskite tikimybę, kad atsitiktinai paimtas kubelis turės dvi nudažytas sienas.

11. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinktų metų sausį bus penki sekmadieniai?

12. Šešiose vienodose kortelėse parašytos raidės A, Ė, I, R, Š, U. Kortelės atsitiktinai sudedamos į eilę. Kokia tikimybė, kad bus sudarytas žodis ŠIAURĖ?

13. Dėžėje yra 31 pirmosios rūšies detalė ir 6 antrosios rūšies detalės. Atsitiktinai paimamos trys detalės. Kam lygi tikimybė, kad: a) visos trys detalės yra pirmosios rūšies; b) bent viena iš paimtųjų detalių yra pirmosios rūšies?

14. Žodis ADATA sukarpytas raidėmis, o raidės atsitiktinai sudėtos į eilę. Kokia tikimybė gauti tą patį žodį?

15. Žodis ŠALTIS sukarpytas raidėmis, atsitiktinai paimtos keturios raidės ir sudėtos į eilę. Kokia tikimybė gauti žodį AŠIS?

16. Kortelėse surašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Atsitiktinai imamos keturios kortelės ir sudedamos į eilę. Kokia tikimybė gauti lyginį skaičių?

17. Iš 28 domino kauliukų atsitiktinai paimamas vienas. Raskite šių įvykių tikimybes:

a) ant kaulelio yra šešios akutės;

b) ant kaulelio yra penkios arba keturios akutės;

c) kaulelio akučių skaičių suma yra lygi 7.

18. Spyną galima atrakinti tik surinkus šifrą — penkiaženklį numerį, kurį galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Kokia tikimybė, kad spyna bus atrakinta surinkus šifrą atsitiktinai?

19. Dėžėje yra 12 baltų ir 8 raudoni čiupinėjant vienodi rutuliai:

a) Atsitiktinai išimtas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis baltas?

b) Atsitiktinai išimtas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis raudonas?

c) Atsitiktinai išimti du rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie skirtingos spalvos?

d) Atsitiktinai išimti aštuoni rutuliai. Kokia tikimybė, kad trys iš jų raudoni?

e) Atsitiktinai išimti aštuoni rutuliai. Kokia tikimybė, kad raudonų rutulių bus ne daugiau kaip trys?

20. Dėžėje yra 13 žalių, 10 raudonų ir 7 mėlyni čiupinėjant vienodi rutuliai. Atsitiktinai išimti 8 rutuliai. Kokia tikimybė išimti 3 žalius, 2 raudonus ir 3 mėlynus rutulius?

21. Kokia yra elementaraus įvykio tikimybė, jeigu jie vienodai tikėtini?

22. Loterijoje iš 7 bilietų 2 laimingi. Septyni žmonės paeiliui traukia (ir negrąžina atgal) po vieną bilietą. Ar tikimybė ištraukti laimintį bilietą priklauso nuo eilės numerio?

23. Loterijoje iš k bilietų vienas laimi. Paeiliui k žmonių traukia (ir negrąžina atgal) po vieną bilietą. Kokia tikimybė ištraukti laimintį bilietą ir ar ji priklauso nuo eilės numerio?

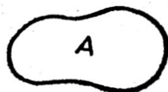
24. Loterijoje iš k bilietų yra p laiminčių bilietų. Paeiliui k žmonių traukia (ir negrąžina atgal) po vieną bilietą. Kokia tikimybė ištraukti laimintį bilietą?

25. Loterijoje iš 11 bilietų 3 laimi. Paeiliui 5 žmonės traukia (ir negrąžina atgal) po vieną bilietą. Kokia tikimybė ištraukti laimintį bilietą?

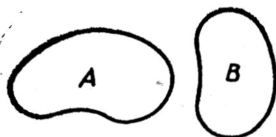
3. Įvykių algebra. Dabar išsamiau panagrinėsime įvykių ryšius. **Paprasčiausius iš jų aptarėme: sutaikomi ir nesutaikomi** įvykiai, įvykis A palankus įvykiui B. Dabar mums reikės apibrėžti „veiksmus su įvykiais“. Beje, tų veiksmų savybės labai primena algebros sudėties ir daugybos savybes. Tai padarius, su įvykiais galima bus atlikinėti veiksmus beveik taip pat, kaip ir algebroje su skaičiais ir reiškiniais. Sakoma, kad gaunama „įvykių algebra“.

Kad tolesnis dėstymas būtų vaizdesnis, susiesime jį su jums žinoma aibių teorijos medžiaga.

Su kiekvienu bandymu siejome jo baigčių — įvykių E_1, E_2, ..., E_n — aibę. Kiekvienam įvykiui A šiame bandyme yra palankios tam tikros baigtys iš duotojo bandymo baigčių aibės. Taigi įvykį A galima laikyti duotojo bandymo elementariųjų įvykių aibės tam tikru poaibiu. Tą poaibį taip pat žymėsime raide A ir vaizduosime įprastu būdu (1 pav.). Tada galima vaizdžiai parodyti visus įvykių ryšius. Pavyzdžiui, jeigu įvykiai A ir B nesutaikomi, tai nėra bandymo baigties, palankios tiek įvykiui A, tiek įvykiui B, t. y. atitinkamos aibės A ir B nesikerta (2 pav.). Jeigu įvykis A palankus įvykiui B, tai kiekviena bandymo baigtis, palanki įvykiui A, yra palanki ir įvykiui B, t. y. atitinkama aibė A yra aibės B poaibis (3 pav.). Jeigu įvykiai A ir B sutaikomi, tai yra tokių bandymo baigčių, kurios yra palankios tiek įvykiui A, tiek įvykiui B, t. y. atitinkamos aibės A ir B kertasi (3, 4 pav.). 4 paveiksle pavaizduoti įvykiai sutaikomi, bet nė vienas jų nėra palankus kitam.



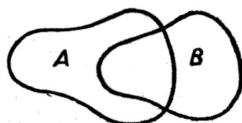
1 pav.



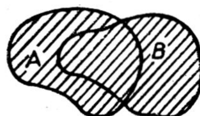
2 pav.



3 pav.



4 pav.



5 pav.

Dabar aibių ryšius pritaikysime įvykiams.

Visų pirma žinote, kas yra dviejų aibių sąjunga. Pritaikykime šią sąvoką įvykiams. Nagrinėkime du įvykius A ir B. Tai tam tikri bandymo baigčių aibės poaibiai. Sudarykime tų poaibių sąjungą $A \cup B$. Ji yra tam tikras bandymo baigčių aibės poaibis, t. y. tam tikras šio bandymo įvykis. Tas įvykis vadinamas įvykių A ir B sąjunga ir žymimas taip pat $A \cup B$. 5 paveiksle įvykių A ir B sąjunga subrūkšniuota. O kaip apibūdinti įvykių sąjungą vien tik tikimybių teorijos terminais? Įvykiui $A \cup B$ yra palankios bandymo baigtys, kurios palankios bent vienam iš įvykių A ir B. Vadinasi, įvykis $A \cup B$ reiškia, kad įvyko bent vienas iš nurodytų įvykių (arba A, arba B, arba A ir B kartu). Aišku, kad analogiškai nagrinėjama trijų, keturių ir apskritai bet kurio įvykių skaičiaus sąjunga. Taigi natūralus toks apibrėžimas.

Apibrėžimas. *Įvykių $A, B, C \ldots$ sąjunga vadinamas toks įvykis, kai bandyme įvyksta bent vienas iš įvykių A, B, C, ... Sąjunga žymima šitaip: $A \cup B \cup C \ldots$.*

Iš šio apibrėžimo tiesiogiai išplaukia lygybės:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

Pateiksime įvykių sąjungos pavyzdžių.

1 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Įvykis $Q_p \cup Q_n$ (žr. p. 51) reiškia, kad atsivertė arba 1 akutė, arba 2 akutės, arba 3 akutės, arba 5 akutės. Taip pat galima parašyti, kad

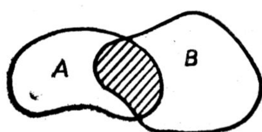
$$Q_p \cup Q_n = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_5.$$

2 pavyzdys. Į elektrinę grandinę lygiagrečiai įjungti du jungikliai. Kiekvienas jų gali būti tiek įjungtas, tiek ir išjungtas. Nagrinėkime įvykius: A=„įjungtas jungiklis 1“, B=„įjungtas jungiklis 2“ ir C=„grandine teka srovė“. Tada, įjungus šią elektrinę grandinę, $C = A \cup B$.

3 pavyzdys. Sekmadienį draugai galėjo nueiti arba į futbolo, arba į krepšinio, arba į tinklinio varžybas. Turime įvykius: A=„draugai nuėjo į futbolo varžybas“, B=„draugai nuėjo į krepšinio varžybas“, C=„draugai nuėjo į tinklinio varžybas“ ir D= =„draugai nuėjo į varžybas“. Tada

$$D = A \cup B \cup C.$$

Be aibių sąjungos, nagrinėjama ir jų sankirta. Pritaikysime įvykiams ir šią sąvoką. Turime du įvykius A ir B. Jie yra ban-



6 pav.

dymo baigčių aibės poaibiai (juos taip pat žymėsime A ir B). Sudarykime sankirtą $A \cap B$ — ji yra tam tikras bandymo baigčių aibės poaibis, t. y. nagrinėjamo bandymo tam tikras įvykis. Tas įvykis vadinamas įvykių A ir B sankirta ir žymimas $A \cap B$. 6 paveiksle subrūkšniuota įvykių A ir B sankirta.

Dabar apibrėšime įvykių sankirtą tikimybių teorijos terminais. Įvykiui $A \cap B$ yra palankios tos bandymo baigtys, kurios yra palankios tiek įvykiui A, tiek įvykiui B (t. y. tie įvykiai įvyksta kartu). Aišku, kad analogiškai galima nagrinėti trijų, keturių ir apskritai bet kurio įvykių skaičiaus sankirtą. Taigi natūralus toks apibrėžimas.

Apibrėžimas. *Įvykių A, B, C, ... sankirta vadinamas toks įvykis, kai bandyme įvyksta visi nurodytieji įvykiai. Sankirta žymima taip: $A \cap B \cap C$ ....*

Iš šio apibrėžimo išplaukia formulės:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

Pateiksime įvykių sankirtos pavyzdžių.

4 pavyzdys. Metamas lošimo kaulelis. Įvykis $Q_p \cap Q_n$ reiškia, kad atsivertė arba 3 akutės, arba 5 akutės. Tai galima užrašyti taip:

$$Q_p \cap Q_n = Q_3 \cup Q_5.$$

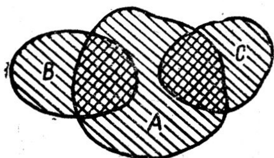
5 pavyzdys. Į elektrinę grandinę nuosekliai įjungti du jungikliai. Kiekvienas jų gali būti įjungtas ar išjungtas. Nagrinėkime įvykius: A=„įjungtas jungiklis 1“, B=„įjungtas jungiklis 2“ ir C=„grandinėje teka srovė“. Tada, įjungus tą elektrinę grandinę, $C = A \cap B$.

6 pavyzdys. Juozas ir Gediminas susitarė sekmadienį eiti į futbolo varžybas, jeigu Juozas šeštadienį nupirks bilietus, jeigu Gediminas mokykloje negaus dvejeto ir jeigu sekmadienį nelis. Nagrinėkime įvykius: A=„Juozas šeštadienį nupirko bilietus į futbolo varžybas“, B=„Gediminas negavo dvejeto“, C=„sekmadienį nelijo“, D=„Juozas ir Gediminas sekmadienį nuėjo į futbolo varžybas“. Aišku, kad

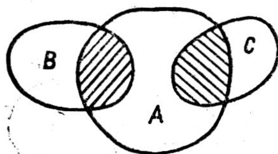
$$D = A \cap B \cap C.$$

Taigi sąjungos ir sankirtos sudarymo veiksmai turi perstatomumo ir jungiamumo savybes ir susieti (kaip sudėtis ir daugyba algebroje) skirstymo dėsniu:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (1)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (2)$$



7 pav.



8 pav.

Tai vaizdžiai matyti iš 7 paveikslo (jame įvykis, esantis (1) lygybės kairėje pusėje, subrūkšniuotas dukart) ir 8 paveikslo (jame aibė, vaizduojanti (1) lygybės dešinės pusės įvykį, subrūkšniuota vieną kartą). Aišku, kad šiuose paveiksluose išskirta ta pati aibė, t. y. ji vaizduoja tą patį įvykį — (1) lygybės kairė pusė lygi dešinei.

Dabar pateiksime skirstymo dėsnio įrodymą, nesiremiantį paveikslais. Įrodysime (1) lygybę. Nagrinėkime bet kurią bandymo baigtį E_k. Tada

$$(E_k \subset A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow ((E_k \subset A) \text{ ir } (E_k \subset B \text{ arba } E_k \subset C)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((E_k \subset A \text{ ir } B) \text{ arba } (E_k \subset A \text{ ir } C)) \Leftrightarrow (E_k \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))).$$

(1) lygybė įrodyta. Analogiškai įrodoma ir (2) lygybė.

Dabar veiksmus su įvykiais jau galime atlikinėti beveik taip pat, kaip paprastoje algebroje. Tiesa, reikia nepamiršti veiksmų su įvykiais kai kurių ypatumų, pavyzdžiui:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Algebroje ypatingą vaidmenį vaidina skaičiai 0 ir 1. Čia taip pat yra įvykių, turinčių analogišką ypatingą vaidmenį. Tie įvykiai vadinami negalimuoju (žymima raide U) ir būtinuoju (žymima raide E).

A p i b r ė ž i m a s. *Įvykis vadinamas* n e g a l i m u o j u, *jeigu įvykti bandyme jis negali. Įvykis vadinamas* b ū t i n u o j u, *jeigu bandyme jis būtinai įvyksta.*

Iš šio apibrėžimo aišku, kad negalimasis įvykis U yra bandymo baigčių tuščioji aibė, o būtinasis įvykis E yra visų duotojo bandymo baigčių aibė. Bet kuris įvykis yra tos aibės poaibis.

Su nesutaikomais įvykiais, ir tik su jais

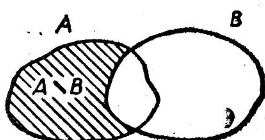
$$A \cap B = U.$$

Būtent taip dažniausiai ir žymima, kad įvykiai nesutaikomi.

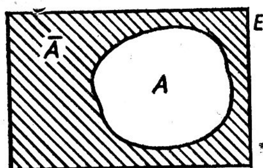
O štai formulės

$$A \cap E = A, \quad A \cup U = A, \quad A \cap U = U,$$

iš karto išplaukiančios iš įvykių U ir E apibrėžimo, rodo, kad negalimasis įvykis U vaidina nulio vaidmenį, o būtinasis įvykis E — vieneto vaidmenį.



9 pav.



10 pav.

Be įvykių sąjungos (jungimas atitinka algebros sudėtį), nagrinėjamas ir įvykių skirtumas.

Apibrėžimas. *Įvykių A ir B skirtumu $A \setminus B$ vadinamas toks įvykis, kai bandyme įvyksta įvykis A ir neįvyksta įvykis B.*

Įvykiui $A \setminus B$ palankios tos bandymo baigtys, kurios palankios įvykiui A, bet nepalankios įvykiui B. Todėl, vaizduojant įvykį $A \setminus B$, iš įvykio A reikia pašalinti visas baigtis, kurios yra palankios įvykiui B (9 pav.).

Pavyzdžiui, $Q_p \setminus Q_n = Q_2$, $Q_t \setminus Q_l = Q_3 \cup Q_5$.

Dažnai būna paprasčiau apskaičiuoti tikimybę, kad įvykis A neįvyks. Todėl reikalingas toks apibrėžimas.

Apibrėžimas. *Įvykis $\bar{A} = E \setminus A$ vadinamas priešingu įvykiui A arba įvykiu „ne A“* (10 pav.).

Pavyzdžiui, $Q_n = Q_l$.

Pratimai

1. Įrodykite šias lygybes:

a) $A \cap E = A$;
b) $A \cup U = A$;
c) $A \cap U = U$;
d) $A \cup E = E$;
e) $\bar{U} = E$;
f) $\bar{E} = U$;
g) $\bar{\bar{A}} = A$;
h) $A \setminus A = U$;
i) $A \setminus E = U$;
j) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;
k) $A \cap \bar{A} = U$;
l) $A \cup \bar{A} = E$;
m) $A \subset B \Rightarrow A / B = U$;
n) $A \cap B \subset A$;
o) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
p) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
r) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
s) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k$;
t) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_k$;
u) $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = U$;
v) $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$.

2. Ar tiesa, kad $(A \cup B = C) \Rightarrow (A = C \setminus B)$?

3. Ar visada su įvykiais A ir B teisinga lygybė $A = (A \cup B) / B$? Pateikite (paveikslais) pavyzdžių, kada tai teisinga ir kada neteisinga.

4. Įrodykite, kad $(B \subset A) \Rightarrow (A = B \cup (A \setminus B))$.

5. Ar visada su įvykiais A, B ir C $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$? Pateikite pavyzdžių (paveikslais), kada tai teisinga ir kada ne.

6. Ar gali būti: a) $A\setminus B=A$? b) $A\setminus B=U$? c) $A\setminus B=B$?

7. Iššifruokite užrašą: a) $\bigcup_{i=1}^{5} A_i$; b) $\bigcup_{k=2}^{4} A_k$.

8. Užrašykite trumpiau: a) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{51}$; b) $A_2\cup A_5\cup A_8\cup \cup\ldots\cup A_{32}$.

9. Bandymas yra dviejų monetų — varinės ir sidabrinės — metimas. Nagrinėjami šie įvykiai:

A=„herbu atsivertė varinė moneta“;
B=„skaičiumi atsivertė varinė moneta“;
C=„herbu atsivertė sidabrinė moneta“;
D=„skaičiumi atsivertė sidabrinė moneta“;
M=„atsivertė bent vienas herbas“;
F=„atsivertė bent vienas skaičius“;
G=„atsivertė herbas ir skaičius“;
H=„neatsivertė nė vienas herbas“;
K=„atsivertė du herbai“.

Kokius šio sąrašo įvykius atitinka užrašai:

1) $A\cup C$; 2) $A\cap C$; 3) $M\cap F$; 4) $G\cup M$; 5) $G\cap M$; 6) $B\cap D$; 7) $M\cup K$?

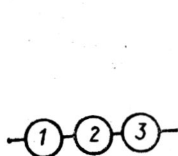
10. Į taikinį šaunama tris kartus. Nagrinėkime įvykius A_k= =„pataikymas k-tuoju šūviu“, $k=1$, 2, 3. Taikydami veiksmus su įvykiais A_k ir $\bar{A}_k$, užrašykite:

A=„visi trys pataikymai“;
B=„visi trys nepataikymai“;
C=„bent vienas pataikymas“;
D=„bent vienas nepataikymas“;
M=„ne mažiau kaip du pataikymai“;
F=„ne daugiau kaip vienas pataikymas“;
G=„pataikymas į taikinį ne anksčiau kaip trečiuoju šūviu“.

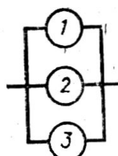
11. Mikroskopo stebėjimo lauke yra keturios ląstelės. Per stebėjimo laiką kiekviena jų gali tiek skilti, tiek ir neskilti. Nagrinėjami įvykiai:

A=„skilo viena ląstelė“;
B=„skilo bent viena ląstelė“;
C=„skilo ne mažiau kaip dvi ląstelės“;
D=„skilo dvi ląstelės“;
M=„skilo trys ląstelės“;
F=„skilo visos keturios ląstelės“.

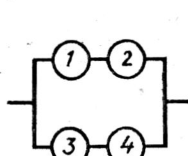
Ką reiškia įvykiai: 1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $B\cup C$; 4) $B\cap C$; 5) $D\cup M\cup F$; 6) $B\cap F$? Ar teisingos lygybės: 7) $B\cap F=C\cap F$; 8) $B\cap \cap C=D$?



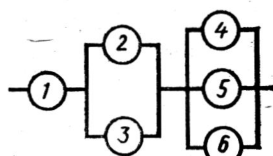
11 pav.



12 pav.



13 pav.



14 pav.

12. Nurodykite įvykius, priešingus šiems įvykiams:

A=„du herbai, metant dvi monetas";

B=„baltas rutulys, imant vieną rutulį iš dėžės su baltais, juodais ir raudonais rutuliais";

C=„trys pataikymai iš trijų šūvių";

M=„ne daugiau kaip du pataikymai iš penkių šūvių";

D=„bent vienas pataikymas iš penkių šūvių";

F=„pirmojo žaidėjo pergalė, žaidžiant šachmatais".

13. 11, 12, 13 ir 14 paveiksle pavaizduotos elektrinės schemos. Jungikliai pavaizduoti skrituliukais su nurodytu jungiklio numeriu. Įvykiais A_k=„įjungtas k-tasis jungiklis" išreikškite šiuos įvykius kiekvienoje schemoje: A=„srovė teka" ir $\bar{A}$=„srovė neteka".

4. Sąjungos tikimybės teorema. Dabar galima nagrinėti teoremas, kuriomis remiantis iš vienų atsitiktinių įvykių tikimybių apskaičiuojamos tikimybės kitų įvykių, vienaip ar kitaip susijusių su pirmaisiais. Paprasčiausia iš tokių teoremų yra sudėties teorema.

1 teorema. ***Jeigu*** $A \cap B = U$, ***tai*** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Įrodymas. Sakykime, nagrinėjamo bandymo baigčių aibę sudaro n vienodai tikėtinų baigčių. Jeigu iš jų m yra palankios įvykiui A, tai $P(A) = \frac{m}{n}$. Jeigu k iš jų yra palankios įvykiui B, tai $P(B) = \frac{k}{n}$. Kadangi įvykiai A ir B nesutaikomi, tai nėra baigčių, kurios būtų palankios tiek įvykiui A, tiek įvykiui B. Vadinasi, įvykiui $A \cup B$ yra palankios $m+k$ baigčių, todėl

$$P(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

1 pavyzdys. Dėžėje yra 7 balti, 5 raudoni ir 8 mėlyni, čiupinėjant neatskiriami rutuliai. Atsitiktinai išimamas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis spalvotas?

Sprendimas. Nagrinėkime įvykius: R=„išimtas raudonas rutulys" ir M=„išimtas mėlynas rutulys". Tai nesutaikomi įvy-

kiai, o mus domina įvykis „išimtas spalvotas rutulys“ = „išimtas raudonas arba mėlynas rutulys“ $= R \cup M$. Todėl pagal 1 teoremą

$$P(R \cup M) = P(R) + P(M) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = 0{,}65.$$

Šiame pavyzdyje paprasčiau apsieiti be 1 teoremos, bet dažnai ji labai pravarti (vėliau tuo įsitikinsite patys).

1 teoremą įrodėme klasikiniu atveju. Bendruoju atveju tai viena pagrindinių įvykio tikimybės savybių ir yra laikoma aksioma. Remdamiesi įvykio dažnio sąvoka, parodysime, kad ši įvykio tikimybės savybė yra visiškai natūrali.

Sakykime, bandymas, kuriame gali įvykti nesutaikomi įvykiai A ir B, pakartotas N kartų. Tarkime, kad įvykis A įvyko M kartų, o įvykis B — K kartų. Tačiau įvykių dažnis su jų tikimybe susijęs apytikslėmis lygybėmis $\frac{M}{N} \approx P(A)$ ir $\frac{K}{N} \approx P(B)$. Kadangi įvykiai A ir B nesutaikomi, tai įvykis $A \cup B$ įvyko $M+K$ kartų. Todėl

$$P(A \cup B) \approx \frac{M+K}{N} = \frac{M}{N} + \frac{K}{N} \approx P(A) + P(B).$$

Kadangi gali būti pasiektas bet koks šių apytikslių lygybių tikslumas (didinant bandymų skaičių N), tai natūralu, kad tikimybės (kurios nuo N nepriklauso) turi tenkinti lygybę

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2 pavyzdys. Šaudymo įskaita pasirašoma, jeigu kursantas gauna ne mažesnį pažymį kaip 4. Kokia tikimybė kursantui gauti įskaitą, jeigu žinoma, jog jis už šaudymą pažymį 5 gauna su tikimybe 0,3, o pažymį 4 — su tikimybe 0,5.

Sprendimas. Įvykiai A = „už šaudymą gautas pažymis 5“ ir B = „už šaudymą gautas pažymis 4“ nesutaikomi. Kadangi mus domina įvykis „įskaita gauta“ $= A \cup B$, tai

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

Gali kilti klausimas: iš kur žinomos pažymių už šaudymą tikimybės? Atsakymas toks — iš ankstesnių šaudymų praktikos.

1 teoremą galima apibendrinti bet kuriam kas du nesutaikomų įvykių skaičiui.

2 teorema. ***Jeigu įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kas du nesutaikomi, tai***

$$\boldsymbol{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k).}$$

Įrodymas. Kai $k=2$, turime 1 teoremą. Įrodysime k įvykių atvejį matematinės indukcijos metodu. Tarkime, kad teorema teisinga su $k=s$. Įrodysime, kad tada ji teisinga ir su $k=s+1$. Nagrinėkime sankirtą

$$A_{s+1} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) =$$
$$= (A_{s+1} \cap A_1) \cup (A_{s+1} \cap A_2) \cup \ldots \cup (A_{s+1} \cap A_s) = U.$$

$A_{s+1} \cap A_i = U$, kai $i=1, 2, \ldots, s$ — juk duotieji įvykiai nesutaikomi. Todėl įvykiai A_{s+1} ir $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s)$ taip pat nesutaikomi, ir remiantis 1 teorema

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s \cup A_{s+1}) = P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) \cup A_{s+1}) = \\ = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) + P(A_{s+1}) = \\ = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_s) + P(A_{s+1}).$$

Paskutinė lygybė parašyta, remiantis prielaida, kad su $k=s$ teorema teisinga.

Remiantis matematinės indukcijos principu, 2 teoremos teiginys teisingas su bet kuriuo natūriniu k.

Dabar nustatysime labai svarbų priešingųjų įvykių tikimybių ryšį.

3 teorema. $\boldsymbol{P(A) = 1 - P(\bar{A})}$.

Įrodymas. Kadangi $A \cap \bar{A} = U$ ir $A \cup \bar{A} = E$, o $P(E) = 1$, tai $1 = P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Iš čia išplaukia reikiama formulė.

3 pavyzdys. Atsitiktinai parenkamas triženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad bent du jo skaitmenys sutaps?

Sprendimas. Šio bandymo baigtis — natūrinio skaičiaus nuo 100 iki 999 gavimas. Kadangi skaičiai parenkami atsitiktinai, tai šios baigtys vienodai tikėtinos. Jų skaičius $n=900$. Mus domina įvykis A=„parinktojo skaičiaus sutampa bent du skaitmenys". Tačiau paprasčiau apskaičiuoti įvykio $\bar{A}$=„parinktojo skaičiaus visi skaitmenys skirtingi" tikimybę. Kiekvienas toks skaičius yra dešimties skaitmenų aibės sutvarkytasis trijų skaitmenų poaibis, be to, pirmoje vietoje negali būti nulis. Vadinasi, tokių skaičių yra $m = A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 9^2 \cdot 8$.

$$P(\bar{A}) = \frac{9^2 \cdot 8}{900} = 0{,}72.$$

Mus dominanti tikimybė $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}28$.

Išvesime bet kokių dviejų (nebūtinai nesutaikomų) įvykių sąjungos tikimybės formulę.

4 teorema. $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

Įrodymas. Iš pradžių įrodysime, kad

$$P(H \setminus M) = P(H) - P(M), \text{ jeigu } M \subset H. \qquad (1)$$

Iš tikrųjų, šiuo atveju $H = M \cup (H \setminus M)$. O kadangi įvykiai M ir $(H \setminus M)$ nesutaikomi, nes

$$M \cap (H \setminus M) = (M \cap H) \setminus (M \cap M) = M \setminus M = U,$$

tai pagal 1 teoremą

$$P(H) = P(M \cup (H \setminus M)) = P(M) + P(H \setminus M);$$

iš čia išplaukia (1) formulė.

Dabar įrodykime pagrindinę formulę. Kadangi $A \cup B = (A \cup (B \setminus (A \cap B))$, o įvykiai A ir $(B \setminus (A \cap B))$ nesutaikomi, tai

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

nes $A \cap B \subset B$ (ir galima taikyti (1) formulę).

Atkreipkite dėmesį į tai, kad tik 1 teorema buvo įrodyta, remiantis klasikiniu įvykio tikimybės apibrėžimu. Visos kitos teoremos įrodytos, remiantis 1 teorema. Kadangi 1 teorema teisinga visada, tai ir visos kitos įrodytos teoremos visada teisingos.

Pratimai

1. Šaulys į dešimtuką pataiko su tikimybe 0,05, į devyniukę — su tikimybe 0,2, į aštuoniukę — su tikimybe 0,6. Raskite šių įvykių tikimybes (iš vieno šūvio):

A = „išmušti ne mažiau kaip aštuoni taškai",

B = „išmušti daugiau kaip aštuoni taškai".

2. Išveskite $P(A \cup B \cup C)$ formulę bendruoju atveju.

3. Dėžėje yra 8 balti ir 12 raudonų, čiupinėjant neatskiriamų rutulių.

a) Atsitiktinai imami 3 rutuliai. Kokia tikimybė išimti vieną baltą rutulį?

b) Atsitiktinai imami 6 rutuliai. Kokia tikimybė išimti ne daugiau kaip vieną baltą rutulį?

c) Atsitiktinai imami 5 rutuliai. Kokia tikimybė išimti ne mažiau kaip du baltus rutulius?

d) Atsitiktinai imami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie bus vienos spalvos?

4. Per sporto šventę Vytas nuėjo į stadioną. Nusipirkti bilietų į futbolo varžybas buvo galima su tikimybe 0,3, į krepšinio — su tikimybe 0,4, į tinklinio — su tikimybe — 0,2. Kokia tikimybė, kad Vytas pateko į varžybas? Kokia tikimybė, kad jis pateko į varžybas, kuriose draudžiama žaisti koja?

5. Dėžėje yra 8 raudoni, 10 žalių ir 12 mėlynų, čiupinėjant neatskiriamų rutulių. Atsitiktinai išimami trys rutuliai. Kokia tikimybė, kad tarp išimtų rutulių nebus bent vienos spalvos rutulio?

6. Dirbtuvėje yra trejos staklės. Per pamainą pirmąsias stakles gali tekti derinti su tikimybe 0,15, o antrąsias — su tikimybe 0,1 ir trečiąsias — su tikimybe 0,12. Tardami, kad kelerių staklių derinti neteks, raskite tikimybę, jog per pamainą teks derinti bent vienerias stakles.

5. Įvykių nepriklausomumas. Kasdieninėje kalboje dažnai šnekama apie nepriklausomus įvykius. Tačiau čia nuomonės dažnai skiriasi: vieni kuriuos nors įvykius laiko nepriklausomais, kiti —

priklausomais. Kad būtų išvengta painiavos, tikimybių teorijoje susitarta dviejų įvykių nepriklausomumą apibrėžti taip.

A p i b r ė ž i m a s. *Įvykiai A ir B vadinami n e p r i k l a u s o m a i s, jeigu*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Bandykime išsiaiškinti, kaip šis apibrėžimas derinasi su mūsų intuicija.

1 p a v y z d y s. Metama moneta ir lošimo kauleiis. Kokia tikimybė, kad atsivers herbas ir lyginis akučių skaičius?

Čia bandymas yra toks: metus monetą ir lošimo kauleli, žiūrima, kuria puse atsivertė moneta ir kokiu akučių skaičiumi — kauleiis. Mūsų intuicija sako, kad atsivertusių akučių skaičius nepriklauso nuo atsivertusios monetos pusės, t. y. įvykiai H= „moneta atsivertė herbu" ir Q_l= „kauleiis atsivertė lyginiu akučių skaičiumi" nepriklausomi. Todėl apskaičiuokime šių įvykių tikimybes, jų sankirtos $H \cap Q_l$ tikimybę ir pasižiūrėkime, ar rezultatas derinasi su nepriklausomųjų įvykių apibrėžimu.

Išskirkime šio bandymo vienodai tikėtinų baigčių aibę. Aišku, kad įvykiai $H \cap Q_k$ ir $S \cap Q_k$ (S= „moneta atsivertė skaičiumi"), $k = 1, 2, \ldots, 6$, yra šio bandymo baigčių aibė. Tie įvykiai vienodai tikėtini, nes bandymo sąlygos simetriškos jų atžvilgiu, galimybės jiems įvykti vienodos. Jų skaičius $n = 12$. Šeši jų palankūs atsiversti herbu — tai įvykiai $H \cap Q_k$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Todėl

$$P(H) = \frac{1}{2}.$$

Įvykiui Q_l palankios taip pat šešios baigtys: $H \cap Q_k$ ir $S \cap Q_k$, $k = 2, 4, 6$. Taigi

$$P(Q_l) = \frac{1}{2}.$$

Sankirtai $H \cap Q_l$ palankios trys baigtys: $H \cap Q_k$, $k = 2, 4, 6$. Todėl

$$P(H \cap Q_l) = \frac{1}{4}.$$

Kadangi $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(H)P(Q_l)$, tai matome, kad šiame pavyzdyje intuityvus dviejų įvykių nepriklausomumo suvokimas ir pateiktas apibrėžimas derinasi.

Dabar tą derinimąsi stebėkime šiek tiek bendresnėje situacijoje.

Sakykime, atliekami du nesusiję bandymai S ir s (pavyzdžiui, metama moneta ir metamas lošimo kauleiis). Abu bandymus atliekame vienu metu. Aišku, kad natūralu juos laikyti nepriklausomais, kaip ir bandymų įvykius; kitaip tariant, jeigu įvykis A gali įvykti bandyme S, o įvykis B gali įvykti bandyme s, tai natūralu laikyti, kad tie įvykiai yra nepriklausomi. Kai kartu atliekami bandymai S ir s, gali įvykti tiek įvykis A, tiek įvykis B, tiek

ir jų sankirta $A \cap B$, t. y. tie įvykiai gali įvykti kartu. Panagrinėkime, kaip čia bus susiję įvykių A, B ir jų sankirtos $A \cap B$ tikimybės.

Nagrinėkime sudėtinį bandymą, sudarytą iš dviejų vienu metu atliekamų nesusijusių bandymų S ir s. Išskirkime to sudėtinio bandymo vienodai tikėtinas baigtis. Nagrinėkime vienodai tikėtinas bandymo S baigtis — įvykius $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ir vienodai tikėtinas bandymo s baigtis — įvykius $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Sudėtiniame bandyme būtinai įvyksta vienas iš įvykių $E_i \cap e_j$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, k$. Tie įvykiai — sankirtos — kas du nesutaikomi, nes kas du nesutaikomi ir E_i, ir e_j. Įvykiai $E_i \cap e_j$ yra sudėtinio bandymo baigtys. Bet jie yra vienodai tikėtini įvykiai. Iš tikrųjų, kadangi E_i yra vienodai tikėtini ir e_j vienodai tikėtini, tai sudėtinio bandymo sąlygos simetriškos įvykių $E_i \cap e_j$ atžvilgiu — visų jų galimybės įvykti sudėtiniame bandyme vienodos. Taigi turime nk vienodai tikėtinų sudėtinio bandymo baigčių.

Sakykime, įvykiui A yra palankios bandymo S baigtys $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Tada sudėtiniame bandyme įvykiui A palankios baigtys $E_i \cap e_j$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, k$. Jų yra mk, todėl

$$P(A) = \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}.$$

Beje, įvykio A tikimybė tiek bandyme S, tiek ir sudėtiniame bandyme ta pati.

Sakykime, bandymui B palankios bandymo s baigtys $e_1, e_2, \ldots, e_l$. Tada sudėtiniame bandyme įvykiui B palankios baigtys $E_i \cap e_j$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, l$. Jų yra nl, todėl

$$P(B) = \frac{nl}{nk} = \frac{l}{k}.$$

Sankirtai $A \cap B$ sudėtiniame bandyme palankios baigtys $E_i \cap e_j$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, l$. Jų yra ml, todėl

$$P(A \cap B) = \frac{ml}{nk} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{k} = P(A)P(B).$$

Matome, kad ir šioje bendresnėje situacijoje intuicija ir dviejų nepriklausomų įvykių apibrėžimas derinasi.

2 pavyzdys. Du medžiotojai vienu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito šauna į kiškį. Kiškis nušaunamas, kai nors vienas medžiotojas pataiko. Raskite tikimybę nušauti kiškį, kai medžiotojų pataikymo tikimybės yra lygios 0,8 ir 0,75.

Sprendimas. Apskaičiuokime priešingojo įvykio — „kiškis nenušautas“ $=\bar{A}$ — tikimybę. Pažymėkime įvykius: $B=$„pirmasis medžiotojas pataikė“, $C=$„antrasis medžiotojas pataikė“. Iš pavyzdžio sąlygos išplaukia, kad šie įvykiai nepriklausomi, o jų tikimybės tokios: $P(B)=0{,}8$, $P(C)=0{,}75$. Kadangi $\bar{A}=\bar{B} \cap \bar{C}$ ir tie įvykiai taip pat nepriklausomi, tai

$$P(\bar{A}) = P(\bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05,$$

ir todėl

$$P(A)=1-P(\bar{A})=0{,}95.$$

Kaip matome, nors medžiotojai ir nelabai taiklūs, jų bendri veiksmai turėtų būti sėkmingi.

3 pavyzdys. Įrodykime tokį teiginį: jeigu įvykiai A ir B nepriklausomi, tai ir įvykiai $\bar{A}$ ir B nepriklausomi.

Sprendimas. Kadangi

$$\bar{A}\cap B=(E\setminus A)\cap B=B\setminus(A\cap B) \text{ ir } A\cap B\subset B,$$

tai

$$P(\bar{A}\cap B)=P(B\setminus(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=P(B)P(\bar{A}),$$

nes įvykiai A ir B nepriklausomi pagal sąlygą.

Žinoma, kalbant apie nepriklausomus bandymus, nebūtina nagrinėti skirtingus bandymus. Galima tą patį bandymą pakartoti nepriklausomai, t. y. jį pakartoti nieko nekeičiant ir neatsižvelgiant į ankstesnio bandymo rezultatus.

4 pavyzdys. Tikimybė pataikyti į taikinį šaunant vieną kartą lygi 0,8. Kokia tikimybė pataikyti į taikinį bent vieną kartą, šaunant du kartus?

Sprendimas. Sakykime, $A=$„pataikymas pirmuoju šūviu" ir $B=$„pataikymas antruoju šūviu". Pagal sąlygą $P(A)=P(B)=$ $=0{,}8$, įvykiai A ir B nepriklausomi. Mus domina įvykis $A\cup B$. Apskaičiuokime priešingojo įvykio $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ tikimybę. Kadangi įvykiai $\bar{A}$ ir $\bar{B}$ taip pat nepriklausomi ir $P(\bar{A})=P(\bar{B})=0{,}2$, tai

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=$$
$$=1-0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}96.$$

Galima nagrinėti daugiau negu du nepriklausomus įvykius ar bandymus.

Apibrėžimas. *Įvykiai A, B, C, ... vadinami nepriklausomais*[1], *jeigu sankirtos tikimybė lygi tikimybių sandaugai, kad ir kokį imtume minėtų įvykių aibės poaibį.*

Atkreipkite dėmesį, kad nepriklausomumas reiškia daugiau nei išvardytųjų įvykių nepriklausomumas kas du. Pavyzdžiui, kad trys įvykiai būtų nepriklausomi, reikia, jog bet kurių dviejų įvykių sankirtos tikimybė būtų lygi tikimybių sandaugai ir visų trijų įvykių sankirtos tikimybė būtų lygi įvykių tikimybių sandaugai. Tai paaiškinsime pavyzdžiu.

5 pavyzdys. Turime vienalytį taisyklingąjį tetraedrą. Jo viena siena nudažyta raudonai, antra — žaliai, trečia — geltonai, o ketvirta padalyta į tris trikampius: vienas jų nudažytas raudonai, kitas — geltonai, trečias — žaliai. Tetraedrą metame ant stalo ir žiūrime, ar „atsivertė reikalinga spalva", t. y. ar yra mus dominanti spalva sienoje, ant kurios nukrito tetraedras.

[1] Dažnai sakoma: „Įvykiai A, B, C, ... nepriklausomi drauge".

Intuityviai aišku, kad trys įvykiai: R=„atsivertė raudona spalva", G=„atsivertė geltona spalva", $\check{Z}$=„atsivertė žalia spalva"— nėra nepriklausomi, nes viena iš sienų nudažyta visomis trimis spalvomis. Dabar pasižiūrėkime, kaip šis intuityvus spėjimas derinasi su pateiktuoju apibrėžimu.

Išskirkime šio bandymo vienodai tikėtinas baigtis. Sunumeruokime tetraedro sienas taip: raudonai nudažyta — 1 numeris, nudažyta geltonai — 2 numeris, nudažyta žaliai — 3 numeris, nudažyta visomis trimis spalvomis — 4 numeris. Aišku, kad keturi įvykiai A_k=„siena atsivertė k numeriu" yra nagrinėjamo bandymo vienodai tikėtinos baigtys. Apskaičiuokime įvykių tikimybes. Įvykiui R palankios dvi baigtys: A_1 ir A_4. Todėl $P(R)=0{,}5$. Analogiškai $P(G)=0{,}5$ ir $P(\check{Z})=0{,}5$. Kiekvienam iš įvykių $R\cap G$, $R\cap \check{Z}$, $G\cap \check{Z}$ ir $R\cap G\cap \check{Z}$ palanki tik viena baigtis A_4, t. y. tų įvykių tikimybės yra lygios 0,25. Taigi

$$P(R\cap G\cap \check{Z})=0{,}25\neq P(R)P(G)P(\check{Z})=0{,}125.$$

Atkreipkite dėmesį į tai, kad bet kurie du iš įvykių R, G ir $\check{Z}$ nepriklausomi — jų sankirtos tikimybė lygi tikimybių sandaugai, o visi trys įvykiai nėra nepriklausomi. Šia labai svarbia pastaba nurodoma, kad negalima samprotauti taip: „kadangi bet kurie du iš nagrinėjamųjų įvykių nepriklausomi, tai ir visi įvykiai nepriklausomi".

6 pavyzdys. Tikimybė pataikyti į taikinį šaunant vieną kartą lygi 0,5. Kokia tikimybė pataikyti nors vieną kartą po dešimt nepriklausomų šūvių?

Sprendimas. Nagrinėkime įvykius A_k=„pataikymas į taikinį k-tuoju šūviu". Pagal sąlygą tie įvykiai nepriklausomi, ir $P(A_k)=\frac{1}{2}$ su bet kuriuo k. Mus domina jų sąjungos tikimybė. Tačiau paprasčiau apskaičiuoti priešingojo įvykio tikimybę:

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10}}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap A_{10}.$$

Kadangi įvykiai $\bar{A}_k$ taip pat nepriklausomi ir $P(\bar{A}_k)=\frac{1}{2}$, tai

$$P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_{10})=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_{10})=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Taigi mus dominančio įvykio tikimybė lygi

$$1-2^{-10}\approx 0{,}999.$$

Šiame pavyzdyje taip pat pravartu atkreipti dėmesį į tai, kad nors šaulys ir netaiklus $\left(\text{pataikymo tikimybė vos } \frac{1}{2}\right)$, bet po 10 šūvių jau beveik tikrai bus nors vieną kartą pataikyta. Apie tokius įvykius sakoma, kad jie praktiškai būtini. Tikimybė 0,001, kad visus 10 kartų bus nepataikyta, labai maža. Įvykiai su panašiomis tikimybėmis įvykti praktiškai negali. Apie juos sakoma, kad jie praktiškai negalimi.

Pratimai

1. Metame monetą ir lošimo kauliuką. Kokia tikimybė, kad moneta atsivers herbu, o kaulelio atsivertusių akučių skaičius bus lyginis?

2. Iš domino kauliukų pilno komplekto atsitiktinai paimame vieną kauliuką ir metame lošimo kauliuką. Kokia tikimybė, kad lošimo kauliukas atsivers pirminiu akučių skaičiumi, o domino kauliuko akučių skaičius dalysis iš trijų?

3. Dvejos staklės dirba nepriklausomai vienos nuo kitų. Tikimybė, kad pirmųjų staklių per visą pamainą neprireiks derinti, lygi 0,9. Antrosioms staklėms ši tikimybė lygi 0,8. Kokia tikimybė, kad abejos staklės visą pamainą išdirbs nederintos? Kokia tikimybė, kad reikės derinti abejas stakles?

4. Įvykiai A ir B nepriklausomi. Įrodykite, kad $\bar{A}$ ir $\bar{B}$ taip pat nepriklausomi įvykiai.

5. Įvykiai A, B ir C nepriklausomi. Įrodykite, kad $\bar{A}$, $\bar{B}$ ir $\bar{C}$ — taip pat nepriklausomi įvykiai.

6. Įvykiai A ir B nepriklausomi. Išveskite $P(A \cup B)$ formulę.

7. Trys šauliai šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė 0,8, antrojo — 0,75, trečiojo — 0,7.

a) Kokia tikimybė pataikyti nors vieną kartą?

b)* Kokia tikimybė pataikyti vieną kartą?

c)* Kokia tikimybė pataikyti du kartus?

8. Gaminant detalę, atliekamos keturios operacijos. Tikimybė gauti broką po kiekvienos operacijos lygi 0,01. Operacijos nepriklausomos. Kokia tikimybė pagaminti detalę be broko?

6. Geometrinės tikimybės. Iki šiol nagrinėjome tikimybinius uždavinius, kai bandymai turi *baigtinį* skaičių baigčių. Daug dažniau susiduriame su bandymais, kurių baigčių skaičius yra *begalinis*. Šiek tiek žinių apie panašias situacijas galima įgyti, susipažinus su paprasčiausiais geometriniais tikimybių teorijos uždaviniais. Šie uždaviniai mums padeda suformuluoti tikimybės geometrinį apibrėžimą.

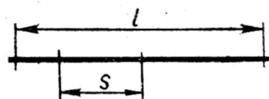
Pradėsime nuo paprasčiausių pavyzdžių.

1 pavyzdys. Sakykime, į ilgio l atkarpą atsitiktinai metamas taškas. Kokia tikimybė, kad tas taškas pateks į ilgio s atkarpą, kuri yra ilgio l atkarpos dalis (15 pav.)?

Remdamiesi įvykio tikimybės vaizdiniais, samprotaujame taip. Jeigu $s=\frac{l}{2}$, tai ieškomąją tikimybę natūralu laikyti lygia $\frac{1}{2}$, jeigu $s=\frac{l}{3}$, — lygia $\frac{1}{3}$ ir t. t. Bendruoju atveju įvykio A=„taškas pateko į ilgio s atkarpą“ natūralu tarti, kad

$$P(A)=\frac{s}{l}. \qquad (1)$$

Ši lygybė atskleidžia pasakymo „atsitiktinai metamas taškas" prasmę.



15 pav.

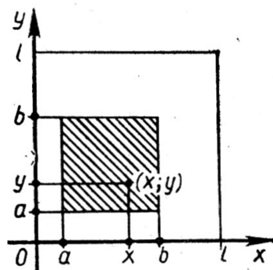
Šiame pavyzdyje išnagrinėtas bandymas — taško metimas į atkarpą — turėjo begalinę baigčių aibę: taškas gali patekti į bet kurį atkarpos tašką. Todėl ankstesniuose skyreliuose nagrinėtas klasikinis būdas čia jau netinka.

2 p a v y z d y s. Sakykime, į tą pačią ilgio l atkarpą vienu metu (nepriklausomai vienas nuo kito) metami du taškai. Kokia tikimybė, kad abu taškai pateks į ilgio s atkarpą $[a; b]$, kuri yra ilgio l atkarpos dalis (15 pav.)?

Nagrinėkime koordinačių tiesę ir ilgio l atkarpą joje. Pirmojo mesto taško koordinatę žymėkime x, antrojo — y. Įvykis A=„pirmas taškas pateko į atkarpą $[a; b]$" pagal sąlygą nepriklauso nuo įvykio B=„antras taškas pateko į atkarpą $[a; b]$". Todėl pagal nepriklausomųjų įvykių A ir B apibrėžimą tikimybė abiem taškams patekti į atkarpą $[a; b]$ yra lygi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{s}{l} \cdot \frac{s}{l} = \frac{s^2}{l^2}.$$

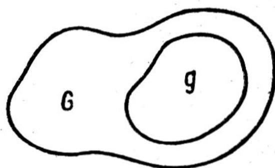
Pažvelkime į šį sprendimą šiek tiek kitaip. Atlikę bandymą, gavome sutvarkytąją skaičių porą $(x; y)$ — pirmojo ir antrojo taško koordinates. Tačiau tada galima kalbėti apie plokštumos tašką su tokiomis koordinatėmis. Įvykis, kad abu mestieji taškai pateko į atkarpą $[a; b]$, ekvivalentus įvykiui, jog taškas su koordinatėmis $(x; y)$ pateko į 16 paveiksle subrūkšniuotą kvadratą. Jau apskaičiuota to įvykio tikimybė yra dviejų kvadratų plotų santykis — subrūkšniuotojo kvadrato ploto s^2 ir didžiojo kvadrato, į kurį gali patekti taškas su koordinatėmis $(x; y)$, ploto l^2 (pagal uždavinio sąlygą $0 \leqslant x \leqslant l$ ir $0 \leqslant y \leqslant l$).



16 pav.

Iš pastebėtojo fakto išplaukia toks įvykio tikimybės apibrėžimas. Sakykime, plokštumoje yra figūra G. Joje išskirta figūra g (17 pav.). Į figūrą G atsitiktinai metamas taškas. Tada įvykio A=„taškas pateko į figūrą g" tikimybė yra lygi figūrų g ir G plotų santykiui, t. y.

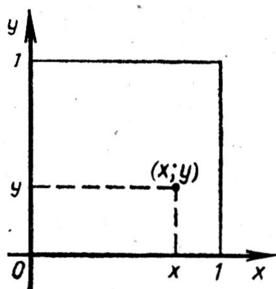
$$P(A) = \frac{S(g)}{S(G)}. \qquad (2)$$



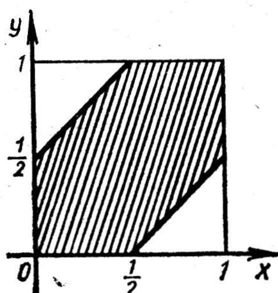
17 pav.

Tokia ir yra posakio „taškas atsitiktinai metamas į figūrą G" prasmė.

3 p a v y z d y s. Du žmonės susitarė susitikti. Pasimatymo sąlygos tokios: į sutartą vietą jie vienas nepriklausomai nuo



18 pav.



19 pav.

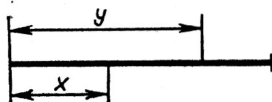
kito ateina atsitiktiniu laiko momentu tarp 13.00 ir 14.00. Atėjęs kiekvienas laukia kito ne daugiau kaip pusvalandį ir nueina ne vėliau kaip 14.00. Kokia tikimybė, kad jie susitiks?

S p r e n d i m a s. Sakykime, vieno iš jų atėjimo laikas (valandomis) yra $13+x$, o kito — $13+y$. Tą įvykį pavaizduokime plokštumos tašku, kurio koordinatės $(x;\ y)$. Kadangi kiekvienas gali ateiti bet kuriuo laiko momentu, tai $(x;\ y)$ yra taškas, atsitiktinai mestas į kvadratą (18 pav.), nes $0 \leqslant x \leqslant 1$ ir $0 \leqslant y \leqslant 1$. O kokią figūrą sudaro taškai, atitinkantys įvykį $A=$„jie susitiko"? Kad jie susitiktų, būtina ir pakanka, jog

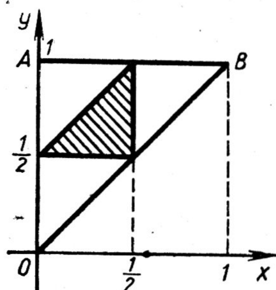
$$|x-y| \leqslant \frac{1}{2}, \text{ arba } x-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant x+\frac{1}{2}.$$

19 paveiksle mus dominanti figūra subrūkšniuota. Kadangi kvadrato (figūros G) plotas lygus 1, tai ieškomoji tikimybė lygi subrūkšniuotos figūros (uždavinio figūros g) plotui, t. y. lygi $\frac{3}{4}$.

Taigi susitikimo tikimybė lygi $\frac{3}{4}$.



20 pav.



21 pav.

4 p a v y z d y s. Į ilgio l atkarpą atsitiktinai metami du taškai. Jie atkarpą dalija į tris mažesnes atkarpas. Kokia tikimybė, kad iš gautųjų atkarpų galima nubrėžti trikampį?

S p r e n d i m a s. Mestųjų taškų atstumus nuo atkarpos kairiojo galo pažymėkime x ir y, $x \leqslant y$ (20 pav.). Tada gautųjų atkarpų ilgiai bus: x, $y-x$ ir $1-y$. Išnagrinėkime plokštumos tašką, kurio koordinatės $(x;\ y)$. Kadangi taškai į atkarpą metami atsitiktinai, tai $(x;\ y)$ yra atsitiktinai į plokštumą metamas taškas. Kadangi jo koordinatės tenkina nelygybes $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, tai taškas $(x;\ y)$ atsitiktinai metamas į tri-

kampį ABO (21 pav.). Kad iš ilgio x, $y-x$ ir $1-y$ atkarpų galėtume nubrėžti trikampį, būtina ir pakanka, jog būtų tenkinamos trikampio nelygybės — kiekvienos kraštinės ilgis mažėsnis už kitų dviejų kraštinių ilgių sumą:

$$x \leqslant 1-x,\ y-x \leqslant 1-y+x,\ 1-y \leqslant y.$$

Šios nelygybės plokštumoje nusako 21 paveiksle subrūkšniuotą trikampį. Jo plotas lygus $\frac{1}{4}$ trikampio ABO ploto. Todėl ieškomoji tikimybė lygi $\frac{1}{4}$.

Pratimai

1. Remdamiesi įvykio tikimybės geometriniu apibrėžimu, įrodykite 4 skyrelio 1 teoremą.

2. Plokštumoje nubrėžtas pluoštas lygiagrečių tiesių, tarp kurių yra vienodi atstumai l. Į plokštumą atsitiktinai metama ilgio l atkarpa. Kokia tikimybė, kad ta atkarpa kerta vieną iš tiesių?

3. Minos padėtos tiesia linija kas 15 m. Tankas, kurio plotis 3 m, važiuoja statmenai tai tiesei. Kokia tikimybė, kad jis užvažiuos ant minos?

4. Spindulio R apskritime pažymėtas taškas A. Apskritime atsitiktinai parenkamas taškas. Kokia tikimybė, kad atstumas nuo jo iki taško A bus mažesnis už R?

5. Į apskritimą atsitiktinai įbrėžiamas trikampis. Kokia tikimybė, kad jis smailusis?

6. Į apskritimą įbrėžtas kvadratas. Į skritulį atsitiktinai metamas taškas. Kokia tikimybė, kad tas taškas pateks į kvadratą?

7. Į apskritimą įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Į skritulį atsitiktinai metamas taškas. Kokia tikimybė, kad jis pateks į trikampį?

8. Į apskritimą atsitiktinai įbrėžiamas trikampis. Kokia tikimybė, kad jis statusis?

9. Į apskritimą atsitiktinai įbrėžiamas trikampis. Kokia tikimybė, kad jis lygiašonis?

10. Trys žmonės susitarė susitikti. Pasimatymo sąlygos tokios: į paskirtą vietą kiekvienas ateina nepriklausomai nuo kitų atsitiktinai tarp 13.00 ir 14.00. Atėjusysis laukia ne daugiau kaip pusvalandį ir nueina, jeigu trūksta nors vieno iš susitinkančiųjų. Po 14.00 niekas nepasilieka. Kokia tikimybė, kad jie susitiks?

11. Į rutulį įbrėžtas kubas. Taškas atsitiktinai metamas į rutulį. Kokia tikimybė, kad jis pateks į kubą?

7. Bernulio bandymų schema. Bernulio formulė. Daugelis tikimybių teorijos uždavinių redukuojami į tokią (vadinamąją Bernulio) schemą. Kuriame nors bandyme mus domina įvykis A.

Žinoma jo tikimybė $P(A)=p$. Bandymas nepriklausomai kartojamas n kartų. Kokia tikimybė, kad įvykis A įvyks lygiai m kartų, $0 \leqslant m \leqslant n$? Ši tikimybė žymima $P_{m,n}$. Į šį klausimą atsako Bernulio formulė:

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m}; \text{ čia } q=1-p. \qquad (1)$$

Išvesime šią formulę. Visus bandymus sunumeruokime numeriais nuo 1 iki n. Nagrinėkime įvykius A_k=„k-tajame bandyme įvyko įvykis A". Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad $P(A_k)=p$ su kiekvienu k ir nagrinėjamieji įvykiai nepriklausomi, nes bandymai kartojami nepriklausomai. Mus domina įvykis $B_{m,n}$=„atlikus Bernulio bandymų schemą, įvykis A pasikartojo lygiai m kartų" ir jo tikimybė. Jeigu įvykis A įvyko bandymuose, kurių numeriai $i_1, i_2, \ldots, i_m$, o bandymuose su likusiais numeriais i_{m+1}, $i_{m+2}, \ldots, i_n$ neįvyko, tai toks sudėtinis įvykis yra

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \bar{A}_{i_{m+1}} \cap \bar{A}_{i_{m+2}} \cap \ldots \cap \bar{A}_{i_n}, \qquad (2)$$

o jo tikimybė dėl įvykių A_k nepriklausomumo lygi

$$P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_m})P(\bar{A}_{i_{m+1}})P(\bar{A}_{i_{m+2}}) \ldots P(\bar{A}_{i_n})=p^m q^{n-m}. \qquad (3)$$

Jeigu įvyks nors vienas (2) tipo įvykis, tai atsitiks ir įvykis $B_{m,n}$. Todėl

$$B_{m,n}=\bigcup (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \bar{A}_{i_{m+1}} \cap \bar{A}_{i_{m+2}} \cap \ldots \cap \bar{A}_{i_n}). \qquad (4)$$

Čia į sąjungą įeina sankirtos, kurių indeksai $\{i_1; i_2; \ldots; i_m\}$ yra bet kuris aibės $\{1; 2; \ldots; n\}$ m-elementis poaibis $\{i_{m+1}; i_{m+2}; \ldots; i_n\}$ — likusių numerių poaibis). Tokių poaibių skaičius lygus C_n^m, ir tai yra (4) sąjungos įvykių skaičius. Tie įvykiai kas du nesutaikomi. Iš tikrųjų, skirtingus įvykius atitinka skirtingos aibės $\{i_1; i_2; \ldots; i_m\}$, t. y. jie skiriasi nors vienu elementu k. Todėl viena sandauga yra $A_k \cap (\ldots)$, o kita — $\bar{A}_k \cap (\ldots)$. Vadinasi, $(A_k \cap (\ldots)) \cap (\bar{A}_k(\ldots))=\bar{A}_k \cap A_k \cap (\ldots)=U$ — įvykiai nesutaikomi. Tačiau tada pagal teoremą apie kas du nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybę $P(B_{m,n})$ yra lygi (4) sąjungos įvykių tikimybių sumai. Kiekvieno tų įvykių tikimybė pagal (3) formulę lygi $p^m q^{n-m}$, jų skaičius lygus C_n^m, todėl

$$P_{m,n}=P(B_{m,n})=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Bernulio formulė išvesta.

1 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad, metant lošimo kauliuką dešimt kartų, 3 akutės atsivers lygiai 2 kartus?

Sprendimas. Čia $n=10$, $m=2$, $p=\frac{1}{6}$, $q=1-p=\frac{5}{6}$ ir

$$P(B_{2,10})=C_{10}^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{5^8}{6^{10}}\approx 0{,}29.$$

Skaičiuoti tokius reiškinius reikia logaritmine liniuote arba naudojantis lentelėmis. Kai n ir m dideli, taip skaičiuoti vis tiek sunku. Tada taikomos apytikslės formulės. Kadangi čia su tomis apytikslėmis formulėmis nesusipažinsime, tai toliau pateiktuose uždaviniuose didelių skaičių nėra; vis dėlto ir iš tų pavyzdžių galima suvokti, kaip praktiškai taikoma išdėstyta medžiaga.

2 pavyzdys. Yra dvi valgyklos (su vienodu vietų skaičiumi). Dešimt žmonių vienu metu eina valgyti. Kiekvienas iš pietaujančiųjų nepriklausomai nuo kitų gali nueiti į bet kurią iš tų valgyklų su tikimybe $\frac{1}{2}$. Kiek vietų reikia turėti kiekvienoje valgykloje, kad tikimybė atėjusiajam pietauti nestovėti eilėje būtų didesnė už 0,8? Išnagrinėję galimus variantus, raskite reikalingų vietų skaičių.

Sprendimas. Iš sąlygos aišku: jeigu kiekvienoje valgykloje bus po 10 vietų, tai eilės nebus. Tačiau tai skaičius su didele atsarga. Pažiūrėkime, kas bus, jeigu kiekvienoje valgykloje bus po 5 vietas. Mus domina įvykio A=„abiejose valgyklose nėra eilės" tikimybė. Nagrinėkime įvykius A_k=„į valgyklą Nr. 1 atėjo k žmonių". Kadangi $A=A_5$, tai užtenka apskaičiuoti įvykio A_5 tikimybę. Taikykime Bernulio formulę. Bandymas yra toks: kiekvienas iš einančių pietauti su tikimybe $\frac{1}{2}$ pasirenka valgyklą Nr. 1. Pagal uždavinio sąlygą visi tie 10 bandymų atliekami nepriklausomai. Todėl pagal Bernulio formulę, kai $p=\frac{1}{2}=q$, gauname

$$P(A_k)=P_{k,\,10}=C_{10}^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=C_{10}^k:1024$$

ir

$$P(A)=P(A_5)=C_{10}^5:1024=252:1024\approx 0{,}25.$$

Taigi valgyklose turėti po 5 vietas neužtenka.

Nagrinėkime atvejį, kai kiekvienoje valgykloje yra po 7 vietas. Tada

$$A=A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6\cup A_7.$$

Iš tikrųjų, jeigu įvyko įvykis A_3, tai į valgyklą Nr. 1 atėjo trys žmonės (čia eilės nėra), o į valgyklą Nr. 2 atėjo 7 žmonės (ir ten eilės nėra). Vadinasi, įvyko įvykis A. Analogiškai nagrinėjami ir kiti sąjungos įvykiai: jeigu įvyko nors vienas iš jų, tai įvyko įvykis A. Iš tikrųjų, likusieji įvykiai $A_k \not\subset A$. Pavyzdžiui, jeigu įvyko įvykis A_2, tai reiškia, kad į valgyklą Nr. 1 atėjo 8 žmonės ir ten susidarė eilė — įvykis A neįvyko. Kadangi sąjungoje surašyti įvykiai kas du nesutaikomi, tai

$$P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)+P(A_7)=$$
$$\frac{C_{10}^3}{1024}+\frac{C_{10}^4}{1024}+\frac{C_{10}^5}{1024}+\frac{C_{10}^6}{1024}+\frac{C_{10}^7}{1024}=\frac{912}{1024}\approx 0{,}89.$$

Taigi valgyklose turėti po 7 vietas užtenka.

Pažiūrėkime, ar neužtektų šešių vietų:

$$A = A_4 \cup A_5 \cup A_6,$$

$$P(A) = P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = \frac{C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6}{1024} = \frac{672}{1024} \approx 0{,}66,$$

Matome, kad šešių vietų valgyklose neužtenka.

Taigi valgyklose turi būti po 7 vietas.

Pateiksime dar vieną suprastintą tikimybinę schemą, vadinamą „taško atsitiktiniu klaidžiojimu tiesėje". Ją nagrinėja A. Kolmogorovas straipsnyje „Įvadas į tikimybių teoriją ir kombinatoriką" (Математика в школе, 1968, № 2).

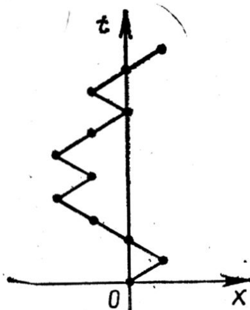
Mokykliniame fizikos kurse jūs susipažinote su Brauno judesiu. Jį 1827 metais atrado botanikas R. Braunas, stebėdamas pro mikroskopą žiedadulkes vandenyje. Kuo kruopščiausiai pašalinus išorinius poveikius, tas judėjimas nenutrūko. Bandymai parodė, jog tai visų pakankamai mažų dalelių skystyje savybė.

22 paveiksle taškais pažymėtos dalelės padėtys per lygius laiko tarpus. Nuoseklios padėtys sujungtos atkarpomis. Gautoji laužtė leidžia supaprastintai įsivaizduoti dalelės nueitą kelią. Tikrovėje tas kelias yra daug sudėtingesnis.

Šio reiškinio aiškinimą žinote iš fizikos. Dabar susipažinkime su paprastesne jo schema.



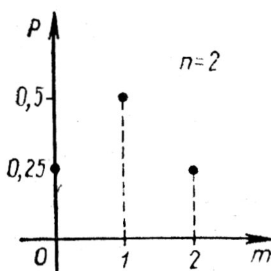
22 pav.



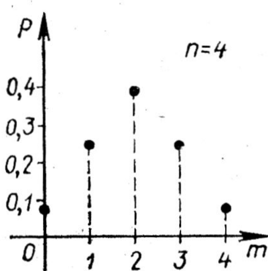
23 pav.

3 pavyzdys. Sakykime, taškas, išėjęs iš koordinačių pradžios, juda tiese taip, kad per sekundę jo koordinatė gali arba padidėti h su tikimybe $\frac{1}{2}$, arba sumažėti h su tikimybe $\frac{1}{2}$. Kas sekundę įvykstantys koordinatės pasikeitimai yra nepriklausomi. Išsiaiškinkime, kaip taško koordinatė pakinta per n sekundžių.

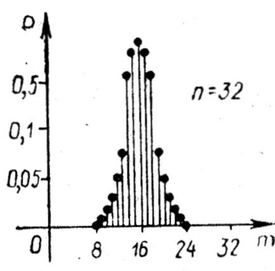
Jeigu koordinatinę tiesę, kuria juda taškas, nubrėšime horizontaliai, o vertikaliojoje koordinačių tiesėje atidėsime taško judėjimo laiką, tai bus galima schemiškai pavaizduoti galimas judėjimo trajektorijas (23 pav.). Nėra neįmanomas atvejis, kad taškas judės tik į dešinę, bet tokio įvykio tikimybė labai maža, kai n didelis,— ji lygi $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Bendruoju atveju per n sekundžių taško koordinatė m kartų padidės dydžiu h, o



24 pav.



25 pav.



26 pav.

likusius $n-m$ kartų sumažės dydžiu h. Tokio įvykio tikimybė pagal Bernulio formulę lygi

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^m .$$

24, 25 ir 26 paveiksle pavaizduotas tos tikimybės kaip m funkcijos grafikas su skirtingais n (horizontaliojoje koordinačių ašyje atidėta m — skaičius taško į dešinę per n sekundžių žingsnių, vertikaliojoje — tikimybė, kad per n sekundžių taškas m kartų pasislinks į dešinę, taigi $n-m$ kartų į kairę). Iš tų paveikslų matyti, kad taškas atsidurs netoli koordinačių pradžios, t. y. apytiksliai $\frac{n}{2}$ kartų koordinatė padidės ir $\frac{n}{2}$ kartų — sumažės. Iš pradžių užfiksuokime n, paskui parinkime tokius kelis numerius m, kad jų tikimybės būtų kuo didesnės, o tikimybių suma būtų didesnė, sakykime, už $\frac{1}{2}$. Iš skaičiavimų matyti, kad tokių skaičių m dalis (palyginti su n) mažėja, kai n didėja, o pačios m reikšmės grupuojasi apie $\frac{n}{2}$.

Pavyzdžiui, kai $n=16$, trijų numerių ($m=7$, 8 ir 9, maždaug tik šeštadalis visų numerių) tikimybės tokios:

$$P_{7,16}+P_{8,16}+P_{9,16}=\frac{1}{2^{16}}\left(C_{16}^8+2C_{16}^7\right)=0{,}54\ldots>0{,}5.$$

Kai $n=41$, penkių numerių ($m=18$, 19, 20, 21, 22, jau mažiau kaip dešimtadalis visų numerių) tikimybės tokios:

$$\frac{1}{2^{41}}\left(C_{41}^{18}+(C_{41}^{19}+C_{41}^{20}+C_{41}^{21}+C_{41}^{22}\right)=0{,}5.$$

Iš teorinių apskaičiavimų matyti, kad ta numerių dalis mažėja kaip $\sqrt{\frac{1}{n}}$.

Pratimai

1. Kokia tikimybė, kad, metant lošimo kauliuką 10 kartų, trys akutės atsivers lygiai tris kartus? lygiai vieną kartą?

2. Bernulio formulėje, kai p ir n fiksuoti, raskite didžiausią tikimybės $P_{m,n}$ reikšmę $P_{m_0,n}$. Įrodykite, kad iki m_0 tos tikimybės didėja, po to — mažėja.

3. Kokia tikimybė, kad, metant lošimo kauliuką 10 kartų, trys akutės atsivers ne daugiau kaip tris kartus?

4. Kokia tikimybė, kad, metant lošimo kauliuką, dalus iš trijų akučių skaičius atsivers lygiai tris kartus? ne daugiau kaip tris kartus? lygiai keturis kartus?

5. Kas labiau tikėtina — laimėti prieš vienodo stiprumo priešininką (lygiųjų nebūna): 1) tris partijas iš keturių ar penkias iš aštuonių? 2) ne mažiau kaip tris partijas iš keturių ar ne mažiau kaip penkias partijas iš aštuonių?

6. Išspręskite 4 skyrelio 6 pratimą, tardami, jog staklėms reikia derinimo nepriklausomai vienoms nuo kitų (ir gali sustoti vienu metu).

8. Atsitiktiniai dydžiai. Dažnai pasitaiko bandymų, kurių rezultatas yra atsitiktinai gaunamas skaičius. Pavyzdžiui, mesdami lošimo kauliuką, atsitiktinai gauname vieną iš skaičių 1, 2, ..., 6. Matuodami taip pat atsitiktinai gauname skaičius — matavimo paklaidas, kurių prognozuoti neįmanoma. Tokiais atvejais sakome, kad susidūrėme su atsitiktiniais dydžiais. Atsitiktinius dydžius įprasta žymėti graikiškosiomis raidėmis ξ (ksi), η (eta), ζ (dzeta) ir t. t. Susipažinti su atsitiktiniais dydžiais pradėsime nuo pačių paprasčiausių bandymų, kurie turi baigtinį baigčių skaičių. Iš pavyzdžio su lošimo kauliuku matome, kad kiekvieną bandymo baigtį Q_k atitinka vienintelis skaičius k — atsitiktinio dydžio reikšmė. Todėl atsitiktinį dydį natūralu laikyti funkcija, apibrėžta bandymo baigčių aibėje. Jį apibrėžiame taip.

Apibrėžimas. *Atsitiktiniu dydžiu vadinama funkcija, apibrėžta bandymo baigčių aibėje.*

Tai reiškia, kad kiekvieną bandymo baigtį E_k atitinka vienintelis skaičius x_k, kuris vadinamas atsitiktinio dydžio ξ reikšme baigtyje E_k, ir rašoma $\xi(E_k)=x_k$. Kai kurie iš skaičių x_k gali sutapti. Jeigu sutampa visos atsitiktinio dydžio reikšmės $x_1=x_2=\ldots=x_n=a$, tai sakoma, kad nagrinėjamasis atsitiktinis dydis yra pastovus, ir rašoma $\xi=a$. Dažniausiai minėtoji atitiktis reiškiama lentele:

Baigtys	E_1	E_2	...	E_k	...	E_n
ξ	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n

(1)

arba trumpiau:

Baigtys	...	E_k	...
ξ	...	x_k	...

(2)

Su atsitiktiniais dydžiais, nagrinėjamais tame pačiame bandyme, elgiamasi kaip su įprastinėmis funkcijomis. Štai kitas atsitiktinis dydis η, išreikštas lentele

Baigtys	...	E_k	...
η	...	y_k	...

(3)

Tada atsitiktinių dydžių ξ ir η suma yra atsitiktinis dydis, žymimas $\xi+\eta$ ir išreiškiamas lentele

Baigtys	...	E_k	...
$\xi+\eta$	...	x_k+y_k	...

(4)

Analogiškai yra su skirtumu, sandauga ir dalmeniu (dalmens atveju reikalaujama, kad nė viena vardiklio — atsitiktinio dydžio η — reikšmė nebūtų lygi nuliui):

Baigtys	...	E_k	...
$\xi-\eta$	...	x_k-y_k	...
$\xi\eta$	...	$x_k \cdot y_k$	...
$\frac{\xi}{\eta}$	...	$\frac{x_k}{y_k}$	...

(5)

Dažnai susiduriama su atsitiktinių dydžių funkcijomis. Gauname bandymo baigčių sudėtines funkcijas, t. y. taip pat atsitiktinius dydžius. Atsitiktinio dydžio ξ funkcija f yra atsitiktinis dydis, išreiškiamas lentele

Baigtys	...	E_k	...
$f(\xi)$	...	$f(x_k)$	...

(6)

Daugeliu klausimų, susiduriant su atsitiktiniais dydžiais, užtenka žinoti paprasčiausias jo charakteristikas: matematinę viltį ir dispersiją.

A p i b r ė ž i m a s. *(1) lentele apibrėžto atsitiktinio dydžio* m a t e m a t i n e v i l t i m i *bandyme su vienodai tikėtinomis baigtimis vadinamas skaičius*

$$M\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{7}$$

Taigi atsitiktinio dydžio matematinė viltis yra „tam tikras jo reikšmių vidurkis“.

1 p a v y z d y s. Atsitiktinis dydis ξ apibrėžtas lentele:

Baigtys	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ	−3	10	0	5	−3	−1	−3	5	1	−3

Rasime jo matematinę viltį bandyme su vienodai tikėtinomis baigtimis.

S p r e n d i m a s. $M\xi = \frac{1}{10}(-3+10+0+5-3-1-3+5+1-3) = 0{,}8$. Įrodysime keletą matematinių vilčių savybių.

1 t e o r e m a. $\boldsymbol{M(a\xi+b) = AM\xi+b}$, ***a ir b — konstantos.***

Į r o d y m a s. Jeigu atsitiktinis dydis bandyme su vienodai tikėtinomis baigtimis išreikštas (1) lentele, tai atsitiktinis dydis $a\xi+b$ tame pačiame bandyme išreiškiamas lentele

Baigtys	...	E_k	...
$a\xi+b$	...	ax_k+b	...

Pagal matematinės vilties apibrėžimą — (7) formulę — turime:

$$M(a\xi+b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b) = \frac{1}{n}\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k + nb\right) =$$

$$= a\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + b = aM\xi + b.$$

2 t e o r e m a. ***Jeigu a ir b — konstantos, tai*** $\boldsymbol{Ma\xi = aM\xi}$, $\boldsymbol{Mb = b}$.

Į r o d y m a s išplaukia iš 1 teoremos: pirmą formulę gauname, kai $b=0$, antrąją — kai $a=0$.

3 t e o r e m a. $\boldsymbol{M(\xi+\eta) = M\xi+M\eta}$.

Įrodymas. Sakykime, atsitiktiniai dydžiai ξ ir η bandyme su vienodai tikėtinomis baigtimis išreikšti (1) ir (3) lentele. Tada atsitiktinis dydis $\xi+\eta$ tame pačiame bandyme išreiškiamas lentele

Baigtys	...	E_k	...
$\xi+\eta$	...	x_k+y_k	...

Iš čia pagal (7) formulę — matematinės vilties apibrėžimą — gauname:

$$M(\xi+\eta)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k}y_k=M\xi+M\eta.$$

Remdamiesi matematine indukcija, iš 3 teoremos gauname, kad su atsitiktiniais dydžiais $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ teisinga formulė

$$M\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{r}M\xi_i. \tag{8}$$

Pratimai

Atsitiktiniai dydžiai bandyme su vienodai tikėtinomis baigtimis išreikšti lentele:

Baigtys	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ_1	7	−2	1	−5	3	−2	1	−2	0	1
ξ_2	5	−1	−7	0	10	4	−1	0	5	3
ξ_3	−6	−2	5	3	5	−2	0	5	1	0
ξ_4	−7	4	6	0	−5	4	−7	0	−3	4
ξ_5	10	0	7	−5	0	10	−5	1	−5	0

Raskite: 1) $M\xi_i$, $i=1, 2, 3, 4, 5$;
2) $M(2\xi_1+3)$;
3) $M(5-3\xi_2)$;
4) $M(\xi_4+\xi_5)$;
5) $M(\xi_2-\xi_4)$;
6) $M(2\xi_1-5\xi_2)$;
7) $M(3\xi_1+2\xi_2-5\xi_3-\xi_4+7)$.

9. Atsitiktinio dydžio pasiskirstymo dėsnis. Pasirodo, ieškant atsitiktinio dydžio matematinės vilties, nebūtina turėti visą (1) lentelę. Tai aišku iš tokios teoremos.

1 teorema. ***Sakykime, įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_r$ yra kas du nepriklausomi, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = E$ ir $\xi(E_i) = a_k$, kai $E_i \subset A_k$. Tada***

$$M\xi = \sum_{k=1}^{r} a_k p_k; \text{ čia } p_k = P(A_k). \quad (1)$$

Įrodymas. Paprastumo dėlei tarkime, kad pirmosios m_1 baigčių $E_1, E_2, \ldots, E_{m_1}$ palankios įvykiui A_1, t. y. $p_1 = \frac{m_1}{n}$, $x_1 = = x_2 = \ldots = x_m = a_1$. Kadangi įvykiai A_1 ir A_2 nesutaikomi, tai nė viena baigčių $E_1, E_2, \ldots, E_{m_1}$ nėra palanki įvykiui A_2. Jam palankios kitos baigtys. Paprastumo dėlei sakykime, kad tai šios m_2 baigčių:

$$E_{m_1+1}, E_{m_1+2}, \ldots, E_{m_1+m_2}, p_2 = \frac{m_2}{n},$$

$$x_{m_1+1} + 1 = x_{m_1+2} = \ldots = x_{m_1+m_2} = a_2$$

ir taip toliau. Užrašykime atsitiktinio dydžio ξ matematinę viltį ir sugrupuokime sumos dėmenis:

$$M\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} ((x_1 + x_2 + \ldots + x_{m_1}) + (x_{m_1+1} + x_{m_1+2} +$$

$$+ \ldots + x_{m_1+m_2}) + \ldots) = \frac{1}{n}(m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots) = a_1 \frac{m_1}{n} +$$

$$+ a_2 \frac{m_2}{n} + \ldots = \sum_{k=1}^{r} a_k p_k.$$

Teorema įrodyta.

Pabrėšime, kad iš teoremos formuluotės išplaukia:

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = 1, \ 0 < p_k \leqslant 1. \quad (2)$$

Iš 1 teoremos aišku, kad, norint apskaičiuoti atsitiktinio dydžio matematinę viltį, užtenka žinoti vien tik skaičius a_k ir p_k. Teoremos sąlygas galima parašyti lentele

Įvykiai	A_1	A_2	...	A_r
ξ	a_1	a_2	...	a_r
p	p_1	p_2	...	p_r

(3)

Paprastai šios lentelės pirmoji eilutė, kurioje nurodomi kas du nesutaikomi įvykiai, nerašoma; tada lentelė atrodo taip:

ξ	a_1	a_2	...	a_r
P	p_1	p_2	...	p_r

arba trumpiau

ξ	...	a_k	...
P	...	p_k	...

(4)

Tik reikia atsiminti, kad kiekvienas šios lentelės stulpelis atitinka tam tikrą įvykį, tie įvykiai kas du nesutaikomi ir bandyme vienas iš jų būtinai įvyksta.

(4) lentelė, kurios užtenka apskaičiuoti matematinei vilčiai, vadinama atsitiktinio dydžio *pasiskirstymo dėsniu.*

Paprastai lentelėje skaičiai a_k skirtingi, bet tai nėra būtina.

(1) formulę atsitiktinio dydžio matematinei vilčiai apskaičiuoti išvedėme, laikydami bandymo baigtis vienodai tikėtinomis. Sudėtingesniais atvejais ta formulė laikoma atsitiktinio dydžio su (4) pasiskirstymo dėsniu matematinės vilties apibrėžimu.

1 pavyzdys. Rasime matematinę viltį atsitiktinio dydžio, kurio pasiskirstymo dėsnis toks:

ξ	1	0
P	p	q

$q=1-p$.

Sprendimas. Pagal (1) formulę gauname: $M\xi=1\cdot p+$ $+0\cdot q=p$.

2 pavyzdys. Duota s vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$; visų pasiskirstymo dėsnis tas pats

ξ_j	1	0
P	p	q

$q=1-p$
$j=1, 2, \ldots, s.$

Raskime jų sumos ir aritmetinio vidurkio matematinę viltį.

Sprendimas. Remiantis 1 pavyzdžiu, $M\xi_j=p$, kai $j=1,$ $2, \ldots, s$. Tada pagal (8) formulę (p. 87) turime:

$$M\left(\sum_{j=1}^{s}\xi_j\right)=\sum_{j=1}^{s}M\xi_j=sp.$$

Remdamiesi 2 teorema (p. 86), gauname:

$$M\left(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\xi_j\right)=\frac{1}{s}M\left(\sum_{j=1}^{s}\xi_j\right)=\frac{1}{s}\cdot sp=p. \qquad (5)$$

Toliau įvykį, kad bandyme atsitiktinis dydis ξ įgijo reikšmę a, bus patogu žymėti ($\xi=a$); įvykį, kad atsitiktinis dydis bandyme įgijo reikšmę, didesnę už a, — ($\xi>a$) ir pan.

Pratimai

1. Atsitiktiniai dydžiai išreikšti lentele (p. 87). Bandymo baigtis laikykime vienodai tikėtinomis. Parašykite atsitiktinių dydžių pasiskirstymo dėsnius. Parašykite atsitiktinio dydžio $\xi_4 \cdot \xi_5$ pasiskirstymo dėsnį.

2. Įrodykite, kad $M(\xi - M\xi) = 0$.

3. Išreikškite bandymo baigtimis ($\xi_1 = -2$).

4. Išreikškite bandymo baigtimis ($\xi_2 > 0$).

5. Išreikškite bandymo baigtimis ($\xi_3 \leqslant 0$).

6. Išreikškite bandymo baigtimis ($-5 \leqslant \xi_4 < 4$).

7. Išreikškite bandymo baigtimis ($-10 \leqslant \xi_5 < 5$).

8. Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo dėsnis toks:

ξ	0	−3	0	1	−3	0	−3
P	0,15	0,1	0,07	0,2	0,2	0,08	

Užpildykite tuščią lentelės langelį. Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo dėsnį parašykite taip, kad pirmoje eilutėje visi skaičiai būtų skirtingi (nesikartotų, kaip šioje lentelėje).

10. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tikimybių teorijoje labai svarbų vaidmenį vaidina nepriklausomų atsitiktinių dydžių sąvoka.

A p i b r ė ž i m a s. *Du atsitiktiniai dydžiai* ξ *ir* η, *kurių pasiskirstymo dėsniai*

ξ	...	a_i	...
P	...	p_i	...

ir

η	...	b_j	...
P	...	p'_j	.

, (1)

vadinami nepriklausomais, jeigu su bet kuriais i ir j

$$P((\xi=a_i)\cap(\eta=b_j)) = P(\xi=a_i)P(\eta=b_j). \tag{2}$$

Pavyzdžiui, bandymas yra dviejų lošimo kaulelių — mėlyno ir raudono — metimas. Atsitiktinis dydis ξ yra mėlynojo kaulelio atsivertusių akučių skaičius. Atsitiktinis dydis η yra raudonojo kaulelio atsivertusių akučių skaičius. Intuityviai aišku, kad tai nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Pasižiūrėkime, kaip mūsų intuicija derinasi su apibrėžimu.

Parašykime atsitiktinių dydžių ξ ir η dėsnius:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

η	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Kadangi su bet kuriais i, $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P((\xi=i)\cap(\eta=j))=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(\xi=i)P(\eta=j),$$

tai tie atsitiktiniai dydžiai nepriklausomi.

1 teorema. ***Jeigu atsitiktiniai dydžiai ξ ir η nepriklausomi, tai***

$$\boldsymbol{M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta.}$$

Įrodymas. Atsitiktinių dydžių ξ ir η pasiskirstymo dėsnius parašykime taip, kad visi a_i būtų skirtingi ir visi b_j būtų skirtingi. Tada

$$P(\xi=a_i)=p_i,\ P(\eta=b_j)=p'_j$$

ir dėl ξ ir η nepriklausomumo su bet kuriais i ir j

$$P((\xi=a_i)\cap(\eta=b_j))=P(\xi=a_i)P(\eta=b_j)=p_ip'_j.$$

Įvykiai $A_{ij}=(\xi=a_i)\cap(\eta-b_j)$ (su bet kuriomis galimomis numerių i ir j kombinacijomis) tenkina 1 teoremos (žr. 9 skyrelį) sąlygas. Iš tikrųjų, jie kas du nesutaikomi: pavyzdžiui, $a_i\neq a_l$, kai $i\neq l$, nes taip užrašėme atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo dėsnį. Todėl $(\xi=a_i)\cap(\eta=a_l)=U$. Vadinasi,

$$A_{ij}\cap A_{lk}=((\xi=a_i)\cap(\eta=b_j))\cap((\xi=a_l)\cap(\eta=b_k))=$$
$$=((\xi=a_i)\cap(\xi=a_l))\cap(\ldots)=U.$$

Kadangi $\bigcup_{i,j}(\xi=a_i)=E$ ir $\bigcup_{j}(\eta=b_j)=E$ (nes pasiskirstymo dėsnyje surašytos visos galimos atsitiktinio dydžio reikšmės), tai, pergrupavę dėmenis, gauname:

$$\cup A_{ij}=\bigcup_{i,j}((\xi=a_i)\cap(\eta=b_j))=((\xi=a_1)\cap\bigcup_{j}(\eta=b_j))\cup$$
$$\cup((\xi=a_2)\cap\bigcup_{j}(\eta=b_j))\cup\ldots=((\xi=a_1)\cap E))\cup$$
$$\cup((\xi=a_2)\cap E))\cup\ldots=\bigcup_{i}(\xi=a_i)=E.$$

Pagaliau, jeigu bandymo baigtis $E_s \subset A_{ij} = (\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)$, tai $\xi\eta$ įgyja reikšmę $a_i b_j$. Todėl pasiskirstymo dėsnis yra

$\xi\eta$	...	$a_i b_j$	...
P	...	$p_i p_j$	...

Remdamiesi skyrelio (1) formule ir pertvarkę, baigiame įrodyti teoremą:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i,j} (a_i b_j) \cdot (p_i p_j) = a_1 p_1 \sum_j b_j p_j + a_2 p_2 \sum_j b_j p_j + \ldots =$$

$$= a_1 p_1 M\eta + a_2 p_2 M\eta + \ldots = M\eta \cdot \sum_i a_i p_i = M\eta \cdot M\xi.$$

Atsitiktinio dydžio matematinė viltis nurodo tašką, apie kurį „išsisklaidžiusios“ atsitiktinio dydžio reikšmės. To „išsisklaidymo“ laipsnį apibūdina dispersija.

A p i b r ė ž i m a s. *Atsitiktinio dydžio* ξ *dispersija vadinamas skaičius*

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

1 p a v y z d y s. Apskaičiuokime atsitiktinio dydžio iš 9 skyrelio 1 pavyzdžio dispersiją.

S p r e n d i m a s. Kadangi $M\xi = p$ ir $q = 1 - p$, tai atsitiktinio dydžio $\xi - M\xi = \xi - p$ pasiskirstymo dėsnis

$\xi - M\xi$	q	$-p$
P	p	q

,

o jo kvadrato $(\xi - M\xi)^2$ pasiskirstymo dėsnis yra

$(\xi - M\xi)^2$	q^2	p^2
P	p	q

.

Iš pasiskirstymo dėsnio randame:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = q^2 p + p^2 q = pq(q + p) = pq.$$

2 t e o r e m a. ***Jei atsitiktiniai dydžiai kas du nepriklausomi, tai***

$$\boldsymbol{D}\left(\sum_i \xi_i\right) = \sum_i \boldsymbol{D}\xi_i.$$

Įrodymas. Remsimės 2 pavyzdžio formule.

$$D\left(\sum_i \xi_i\right)=M\left(\sum_i \xi_i\right)^2-\left(M\left(\sum_i \xi_i\right)\right)^2 \overset{(1)}{=}$$

$$=M\left(\sum_i \xi_i^2+2\sum_{i<j}\xi_i\xi_j\right)-\left(\sum_i M\xi_i\right)^2 \overset{(1)}{=}$$

$$=\sum M\xi_i^2+2\sum_{i<j}M(\xi_i\xi_j)-\sum_i (M\xi_i)^2-2\sum_{i<j}M\xi_i\cdot M\xi_j \overset{(2)}{=}$$

$$=\sum_i (M\xi_i^2-(M\xi_i)^2)+2\sum_{i<j}M\xi_i\cdot M\xi_j-2\sum_{i<j}M\xi_i M\xi_j=\sum_i D\xi_i$$

(1) — pagal sumos kėlimo laipsniu taisyklę ir pagal 8 skyrelio (8) formulę; (2) — remiantis atsitiktinių dydžių nepriklausomumu kas du ir 1 teorema.)

3 teorema. ***$D(a\xi)=a^2D\xi$*, kai *a* — konstanta.**

Įrodymas. Remiantis dispersijos apibrėžimu ir 8 skyrelio 2 teorema,

$$D(a\xi)=M(a\xi-M(a\xi))^2=M(a\xi-aM\xi)^2=Ma^2(\xi-M\xi)^2=$$
$$=a^2M(\xi-M\xi)^2=a^2D\xi.$$

2 pavyzdys. Tarkime, kad 9 skyrelio 2 pavyzdžio atsitiktiniai dydžiai kas du nepriklausomi. Raskime jų sumos ir aritmetinio vidurkio dispersiją.

Sprendimas. Remdamiesi 1 pavyzdžiu, su bet kuriuo i turime: $D\xi=pq$. Todėl pagal 2 teoremą

$$D\left(\sum_{i=1}^{s}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{s}D\xi_i=spq.$$

Tada pagal 3 teoremą

$$D\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\xi_i\right)=\frac{1}{s^2}D\left(\sum_{i=1}^{s}\xi_i\right)=\frac{1}{s^2}(spq)=\frac{pq}{s}.$$

Detaliau aptarkime paskutinį pavyzdį. Jis labai svarbus, darant praktines išvadas iš tikimybių teorijos. Įsivaizduokime, kad matuojame ilgį. Tikrasis ilgis lygus a. Kiekviename matavime yra tam tikra paklaida — gauname ne skaičių a, o tam tikrą jo artinį. i-tojo matavimo rezultatą pažymėkime ξ_i. Tai tam tikras atsitiktinis dydis, nes matavimo paklaidos paprastai atsitiktinės. Jeigu matuodami nedarome sistemingos paklaidos, tai $M\xi_i=a$. Pabandykime suvokti, kas tai yra dispersija. Nagrinėkime supaprastintą matavimų schemą: sakykime, kiekvieno matavimo paklaida gali būti arba h, arba $-h$ ($h>0$), ir abi paklaidos vieno-

dai tikėtinos. Gauname tokį matavimo paklaidos $\xi_i - a$ (atsitiktinis dydis) pasiskirstymo dėsnį:

$\xi_i - a$	h	$-h$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tada šio atsitiktinio dydžio kvadrato pasiskirstymo dėsnis

$(\xi_i - a)^2$	h^2	h^2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Todėl su bet kuriuo i

$$D\xi_i = h^2 \cdot \frac{1}{2} + h^2 \cdot \frac{1}{2} = h^2.$$

Taigi šioje supaprastintoje schemoje matavimo paklaida ir dispersijos $D\xi_i$ susijusios visiškai paprastai:

$$\sqrt{D\xi_i} = h.$$

Šis ryšys tam tikra prasme išlieka ir bendruoju atveju: $\sqrt{D\xi_i}$ apibūdina matavimo paklaidą.

Dabar pažvelkime į 2 pavyzdžio sprendimo rezultatą, ir bus lengva suvokti, kodėl matuojama daug kartų ir panaudojamas gautųjų rezultatų aritmetinis vidurkis. Kiekvieno matavimo rezultatas — atsitiktinis dydis. Matuojama paprastai taip, kad matavimų rezultatus — atsitiktinius dydžius — galima laikyti kas du nepriklausomais. Tada atitinkamų atsitiktinių dydžių dispersijos sudedamos. Todėl matavimų aritmetinio vidurkio paklaida (remiantis 2 pavyzdžio sprendime gauta atsitiktinių dydžių aritmetinio vidurkio dispersijos formule) $\sqrt{n}$ kartų mažesnė už kiekvieno matavimo paklaidą (iš aritmetinio vidurkio dispersijos traukiama kvadratinė šaknis).

Taigi, didinant nepriklausomų matavimų skaičių, jų aritmetinio vidurkio tikslumas didėja.

Pratimai

1. Įrodykite, kad konstantos dispersija lygi nuliui.
2. Įrodykite, kad $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.
3. Įrodykite, kad $D(\xi + b) = D\xi$ su bet kuria konstanta b.
4. Pagal 88 puslapyje apibrėžtus atsitiktinius dydžius apskaičiuokite a) $D(3 - 2\xi_1)$; b) $D(\xi_2 + \xi_3)$ ir palyginkite su $D\xi_2 + D\xi_3$.

11. Tikimybių teorijos ribinės teoremos. Dabar įrodysime teoremas, atskleidžiančias teorijos ir praktikos ryšį. Jis bus ne toks schemiškas kaip anksčiau. Pirmąją šios serijos teoremą atrado ties XVII ir XVIII amžiaus riba (paskelbta 1713 metais) šveicarų mokslininkas Jakobas Bernulis (1654—1705). Jo įrodymas buvo labai sudėtingas. Vėliau daugelio matematikų pastangomis jis buvo labai supaprastintas. Toliau pateikiamame įrodyme pagrindinis vaidmuo tenka nelygybei, kurią praėjusio amžiaus pabaigoje atrado didysis rusų matematikas Pafnutijus Čebyšovas (1821—1894).

1 teorema (Čebyšovo nelygybė). ***Jeigu atsitiktinis dydis*** $\xi \geqslant 0$ ***ir konstanta*** $a>0$, ***tai***

$$P(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{M\xi}{a}.$$

Įrodymas. Nagrinėkime atsitiktinį dydį ξ, kuris turi 9 skyrelio (4) pasiskirstymo dėsnį. Tada įvykis $(\xi \geqslant a)$ reiškia, kad įvyko nors vienas iš įvykių $(\xi = a_i)$; čia i toks, kad $a_i \geqslant a$, t. y.

$$(\xi \geqslant a) = \bigcup_{i\, a_i \geqslant a} (\xi = a_i)$$

(sąjungoje yra tik tie numeriai i, kurie tenkina nelygybę $a_i \geqslant a$). Vėl tarkime, kad visi a_i skirtingi. Tada įvykiai $(\xi = a_i)$ kas du nesutaikomi ir

$$P(\xi \geqslant a) = P\Big(\bigcup_{i\, a_i \geqslant a} (\xi = a_i)\Big) =$$

$$= \sum_{i,\, a_i \geqslant a} P(\xi = a_i) = \sum_{i,\, a_i \geqslant a} p_i \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{i,\, a_i \geqslant a} p_i \frac{a_i}{a} = \frac{1}{a} \sum_{i,\, a_i \geqslant a} a_i p_i \overset{(2)}{\leqslant} \frac{1}{a} \sum_{i} a_i p_i = \frac{1}{a} M\xi$$

((1) kadangi $p_i > 0$ ir $\frac{a_i}{a} \geqslant 1$ remiantis sąlyga, kurią tenkina numeriai i; (2) sudėjus jau visus įmanomus dėmenis be jokių apribojimų, gali atsirasti naujų dėmenų, bet suma dėl to gali tik padidėti).

Toliau pateikiamos dvi teoremos paprastai vadinamos bendru didžiųjų skaičių dėsnio vardu.

2 (Bernulio) teorema. ***Nagrinėkime bandymą, kuriame gali įvykti įvykis A su tikimybe p. Tas bandymas nepriklausomai kartojamas n kartų. Įvykis A įvyksta m kartų. Tada, kad ir koks būtų skaičius*** $a>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geqslant a\right) = 0.$$

Įrodymas. Remsimės Bernulio nelygybe:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{pq}{a^2 n}. \qquad (1)$$

Išvesime šią nelygybę. Apibrėžkime n atsitiktinių dydžių $i=1, 2, \ldots, n$ taip: $\xi_i=1$, jeigu i-tajame bandyme įvyko įvykis A, ir $\xi_i=0$ visais kitais atvejais. Kadangi bandymai atliekami nepriklausomai, tai visi tie atsitiktiniai dydžiai nepriklausomi. Be to, jie vienodai pasiskirstę pagal tokį pasiskirstymo dėsnį:

ξ_i	1	0
P	p	q

$q=1-p,$
$i=1, 2, \ldots, n.$

Dar pastebėkime, kad

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i = m. \quad (2)$$

Iš tikrųjų, po n bandymų įvykis A įvyko m kartų (pavyzdžiui, pirmuosiuose m bandymų, kurių numeriai yra $1, 2, \ldots, m$), o kituose bandymuose (kurių numeriai $m+1, m+2, \ldots, n$) įvykis A neįvyko. Tada $\xi_1=1$ (nes įvykis A įvyko pirmajame bandyme, $\xi_2=1$ (nes įvykis A įvyko antrajame bandyme), ir t. t. $\xi_m=1$ (nes įvykis A įvyko m-ame bandyme), o $\xi_{m+1}=0$ (nes bandyme su numeriu $m+1$ įvykis A neįvyko), $\xi_{m+2}=0$ (nes įvykis A bandyme su numeriu $m+2$ neįvyko) ir t. t., $\xi_n=0$ (nes n-ame bandyme įvykis A neįvyko). Taigi (2) sumoje lygiai m dėmenų lygūs 1, o kiti dėmenys lygūs 0. Todėl visa suma lygi m.

Išveskime atsitiktinį dydį

$$\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{m}{n}.$$

Iš 3 pavyzdžio išplaukia, kad $M\xi=p$. Todėl

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \geqslant a\right) \overset{(1)}{=} P(|\xi-M\xi \geqslant a) \overset{(2)}{=}$$

$$= P((\xi-M\xi)^2 \geqslant a^2) \overset{(3)}{\leqslant} \frac{1}{a^2} M(\xi-M\xi)^2 \overset{(4)}{=} \frac{1}{a^2} D\xi \overset{(5)}{=} \frac{pq}{a^2 n},$$

((1) $\frac{m}{n}=\xi$ ir $p=M\xi$,
(2) nes skliaustuose parašytos ekvivalenčios nelygybės;
(3) pagal Čebyšovo nelygybę, taikomą atsitiktiniam dydžiui

$$(\xi-M\xi)^2;$$

(4) pagal dispersijos apibrėžimą;
(5) remiantis 10 skyrelio 2 pavyzdžiu).
Iš įrodytos (1) nelygybės išplaukia teorema.

Vaizdžiai šios teoremos prasmę galima nusakyti taip. Praktikoje paprastai neatsižvelgiama ne tik į negalimus įvykius, bet

ir į mažos tikimybės įvykius. Sakoma, kad tokie įvykiai praktiškai negalimi. Pavyzdžiui, jeigu neatsižvelgiate į mažesnės už 0,01 (dar sakoma mažesnės už 1% tikimybės) tikimybės įvykius, tai sakoma, kad jūsų samprotavimų patikimumas 99%. Analogiška yra posakio „samprotavimai atlikti su 95% patikimumu" prasmė — tai reiškia, kad mažesnės už 0,05 tikimybės įvykiai laikomi praktiškai negalimais ir į juos neatsižvelgiama.

Teorema, pavyzdžiui, reiškia, kad, esant pakankamai dideliam bandymų skaičiui, įvykio dažnis $\left(\text{skaičius } \frac{m}{n}\right)$ praktiškai lygus jo tikimybei. Tai reiškia, kad, atlikus pakankamai daug bandymų, su bet kuriuo patikimumu ir bet kuriuo tikslumu galima laikyti, jog $p \approx \frac{m}{n}$.

(1) nelygybė, siejanti patikimumą su bandymų skaičiumi n, labai netiksli. Matematinėje statistikoje yra daug teoremų, daug tiksliau įvertinančių patikimumą.

1 pavyzdys. Lošimo kauliukas mestas 1 200 kartų. Įvertinkime tikimybę, kad trijų akučių atsivertimo skaičius skiriasi nuo 200 daugiau negu 60.

Sprendimas. Šiame pavyzdyje $n=1\,200$; mus dominančio įvykio — trijų akučių atsivertimo — tikimybė yra $p=\frac{1}{6}$. Patogu (1) nelygybėje pasirinkti $a=\frac{b}{n}$ ir perrašyti ją taip:

$$P(|m-np| \geqslant b) \leqslant \frac{npq}{b^2}. \tag{3}$$

Tada $np=200$, $b=60$, ir gauname

$$P(|m-200| \geqslant 60) \leqslant \frac{1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{60^2} = \frac{5}{108} < 0{,}05.$$

Praktiškai tai reiškia štai ką: nagrinėjamame bandyme trijų akučių atsivertimo skaičius su 95% patikimumu bus tarp 140 ir 260.

Trumpai apie (3) nelygybę sakoma, kad ji įvertina skaičiaus m nuokrypį nuo np (kai np sveikas — tai tikėtiniausias įvykių skaičius).

Dar pažymėsime tokį dalyką: jeigu samprotaujame su patikimumu $1-c$ $(0<c<1)$, tai natūralu reikalauti, kad būtų tenkinama nelygybė $\frac{npq}{b^2} \leqslant c$. Jeigu $b=\sqrt{\frac{pq}{c}} \cdot \sqrt{n}$, tai parašytoji nelygybė bus teisinga. Apie tokius b sakoma, kad jų eilė yra $\sqrt{n}$. Pavyzdžiui, kai atliekama 10 000 bandymų, nuokrypiai yra kelių šimtų eilės.

Tolesnė teorema apibendrina Bernulio teoremą ir vadinama Čebyšovo formos didžiųjų skaičių dėsniu.

3 (Čebyšovo) teorema. ***Jeigu atsitiktiniai dydžiai*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ***kas du nepriklausomi ir*** $D\xi_n \leqslant C$ ***su visais*** n, ***tai bet kuriuo*** $a>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}M\xi_i\right| \geqslant a\right) = 0.$$

Įrodymas. Sudarykime atsitiktinį dydį

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Remiantis 2 teorema ir 8 skyrelio (8) formule

$$M\eta_n = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i,$$

o remiantis atsitiktinių dydžių nepriklausomumu kas du ir 10 skyrelio 2 teorema

$$D\eta_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i \leqslant \frac{1}{n^2}(Cn) = \frac{C}{n}, \tag{4}$$

nes $D\xi_i \leqslant C$ su visais i pagal teoremos sąlygą. Todėl

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| \geqslant a\right) \overset{(1)}{=} P(|\eta_n - M\eta_n| \geqslant a) \overset{(2)}{=}$$

$$= P((\eta_n - M\eta_n)^2 \geqslant a^2) \overset{(3)}{\leqslant} \frac{1}{a^2}M(\eta_n - M\eta_n)^2 = \frac{1}{a^2}D\eta_n \overset{(4)}{\leqslant} \frac{C}{a^2 n}$$

((1) remiantis η_n apibrėžimu;
(2) nes skliaustuose parašytos nelygybės ekvivalenčios;
(3) pagal Čebyšovo nelygybę;
(4) remiantis (4) nelygybe).

Taigi gavome nelygybę

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{C}{a^2 n},$$

iš kurios išplaukia teorema.

Vaizdžiai šios nelygybės ir teoremos prasmę galima nusakyti taip: su visais pakankamai dideliais n tikimybė

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| \geqslant a\right)$$

maža. Todėl nelygybė

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|\geqslant a$$

praktiškai negalima, t. y. praktiškai būtina priešinga nelygybė

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|<a. \qquad (5)$$

Vadinasi, bet kuriuo tikslumu (t. y. (5) nelygybėje laisvai pasirenkamo skaičiaus $a>0$ tikslumu) ir praktiškai tikrai (t. y. su bet kuriuo patikimumu) su visais pakankamai dideliais n teisinga apytikslė lygybė

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i.$$

Čebyšovo teoremos praktinę svarbą galima pailiustruoti dar ir tokiu pavyzdžiu. Įsivaizduokite, jog matuojate kokį nors ilgį. Matuojant neišvengiamos atsitiktinės matavimo paklaidos. Vadinasi, kiekvieno matavimo rezultatas yra tam tikras atsitiktinis dydis, o n matavimų rezultatas yra atsitiktinių dydžių serija ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n. Natūralu tarti, kad visi matavimai atliekami nepriklausomai vienas nuo kito, t. y. gautieji atsitiktiniai dydžiai kas du nepriklausomi. Kiekvieno atsitiktinio dydžio matematinė viltis yra matuojamas ilgis l, (tariame, kad matuodami nedarome sistemingos paklaidos,— pavyzdžiui, naudojame teisingai sužymėtą liniuotę). Kiekvieno matavimo paklaida apibūdinama atitinkamo atsitiktinio dydžio dispersija. Aišku, jog visos paklaidos aprėžtos — juk tikrai nebus paklaidų, dukart didesnių už matuojamąjį dydį. Taigi matuojant Čebyšovo teoremos sąlygos paprastai įvykdomos. Todėl bet kuriuo tikslumu ir bet kuriuo patikimumu su visais pakankamai dideliais n

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}\xi_i\approx l.$$

Nelygybę, kurią išvedėme, įrodydami Čebyšovo teoremą, galima patikslinti: jeigu $D\xi_i=\sigma^2$, tai minimaliomis sąlygomis

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\Sigma\xi_i\right|<a\right)\approx 2\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right); \qquad (6)$$

Φ — normalusis Gauso pasiskirstymas — lyginė funkcija, kurios lentelės yra kiekvienoje tikimybių teorijos knygoje.

2 pavyzdys. Kiek kartų turime matuoti su tuo pačiu $\sigma=0{,}1$, kad 0,01 tikslumu su 98% patikimumu gautume matuojamąjį dydį?

Sprendimas. Čia $a=0,01$, ir (6) formulėje n reikia parinkti taip, kad būtų patenkinta nelygybė $2\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{0,1}\right)\geqslant 0,98$. Iš lentelių randame, jog $\frac{\sqrt{n}}{10}\geqslant 2,33$; iš čia $n\geqslant 543$.

ATSAKYMAI

1 skyrelis. 1. a) S ir H nesutaikomi; b) sutaikomi A ir B, B ir C, B ir D, $C\subset A$, $D\subset B$; c) nesutaikomi A ir B, A ir C, B ir C, D ir A, B ir D; $C\subset D$, $D\subset C$; d) sutaikomi B ir C, A ir B; nesutaikomi A ir C; $C\subset B$. **2.** Ne. **3.** Ne. **4.** $E=$„viena moneta atsivertė herbu, o kita — skaičiumi“. **5.** $\{A, B, C\}$.

2 skyrelis. 1. a) Taip; b) ne (dažniausiai); c) nebūtinai; d) vienodai tikėtini A ir B, A ir C — ne; e) taip; f) taip. **2.** a) Taip; b) taip; c) taip; d) taip; e) ne; f) ne. **3.** Žr. 1 d. pratimą. **4.** Metant lošimo kauliuką įvykiai Q_1, Q_2 ir Q_3. **5.** Metant lošimo kauliuką Q_l, Q_n, Q_p, Q_1. **6.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{1}{2}$.

8. a)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b)

0	1	2	3	4	5
$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

c) $\frac{11}{36}$. **9.** $\frac{1}{5}$. **10.** $\frac{12}{125}$. **11.** $\frac{3}{7}$. **12.** $\frac{1}{720}$. **13.** a) $\frac{899}{1554}\approx 0,58$; b) $\frac{775}{777}\approx 0,9974$. **14.** $\frac{1}{20}$. **15.** $\frac{1}{360}$. **16.** $\frac{4}{9}$. **17.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{13}{28}$; c) $\frac{3}{28}$. **18.** $\frac{1}{7^5}$. **19.** a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{48}{95}$; d) $\frac{C_8^3\cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}\approx 0,35$;

e) $\frac{C_8^3\cdot C_{12}^5+C_8^2\cdot C_{12}^6+C_8^1\cdot C_{12}^7+C_8^0\cdot C_{12}^8}{C_{20}^8}=\frac{5137}{8398}\approx 0,6117$. **20.** $\frac{C_{13}^3\cdot C_{10}^2\cdot C_7^3}{C_{30}^8}=\frac{154}{2001}=0,077$. **21.** $\frac{1}{n}$. **22.** $\frac{2}{7}$, nepriklauso nuo vietos eilėje. **23.** $\frac{1}{k}$, nepriklauso nuo vietos eilėje. **24.** $\frac{p}{k}$. **25.** $\frac{3}{11}$.

3 skyrelis. 2. Ne; teisinga tik tada, kai $A\cap B=U$. **3.** Teisinga, tik tada, kai $A\cap B=U$. **5.** Teisinga tik tada, kai $A\cap C=U$. **6.** a) Kai $B=U$; b) kai $A\subset B$; c) kai $A=B=U$. **7.** a) $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$; b) $A_2\cup A_3\cup A_4$.

8. a) $\bigcup_{i=1}^{51} A_i$; b) $\bigcup_{k=1}^{11} A_{3k-1}$. 9. 1) M, 2) K, 3) G, 4) M, 5) G, 6) H, 7) M.
10. $A=A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$, $C=A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $D=\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$, $M=(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cup A_3)$, $F=(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$, $G=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. 11. 1) B, 2) A, 3) B, 4) C, 5) C, 6) F, 7) F, taip, 8) ne, $B \cap C = C \neq D$. 12. $\bar{A}$=„atsivertė nors vienas skaičius", $\bar{B}$=„išimtas raudonas arba juodas rutulys", $\bar{C}$=„nors vieną kartą nepataikoma", $\bar{M}$=„pataikoma ne mažiau kaip tris kartus", $\bar{D}$=„visai nepataikoma", $\bar{F}$=„lygiosios arba antro žaidėjo pergalė". 13. 11 pav., $A=A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $\bar{A}=\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$; 12 pav., $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\bar{A}=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$; 13 pav., $A=(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$, $\bar{A}=(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cap (\bar{A}_3 \cup \bar{A}_4)$; 14 pav., $A=A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \cap (A_4 \cup A_5 \cup A_6)$, $\bar{A}=\bar{A}_1 \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup (\bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6)$.

4 skyrelis. 1. $P(A)=0{,}85$ ir $P(B)=0{,}25$. **2.** $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$.

3. a) $1-\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{46}{57}$; b) $\frac{C_{12}^5+C_{12}^5 \cdot 8}{C_{20}^6}=\frac{121}{646}=0{,}187$; c) $1-\frac{C_{12}^5+C_{12}^4 \cdot 8}{C_{20}^5}=\frac{224}{323}=0{,}693$; d) $\frac{C_{12}^2+C_8^2}{C_{20}^2}=\frac{47}{95}=0{,}495$. **4.** 0,9 ir 0,6. **5.** $1-\frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{C_{30}^3}=\frac{155}{203}=0{,}763$.
6. $1-0{,}85 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}9=0{,}3268$.

5 skyrelis. 1. $\frac{1}{4}$. **2.** $\frac{13}{56}$. **3.** 0,72 ir 0,02. **6.** $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A) \cdot P(B)$. **7.** a) 0,985; b) 0,14; c) 0,425. **8.** $(0{,}99)=0{,}96$.

6 skyrelis. 2. $\frac{2}{\pi}$. **3.** $\frac{1}{5}$. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{1}{4}$. **6.** $\frac{2}{\pi}$. **7.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **8.** 0. **9.** 0. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

7 skyrelis. 1. $C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7=0{,}155$ ir $C_{10}^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9=0{,}323$.
3. $P_{0,10}+P_{1,10}+P_{2,10}+P_{8,10}=0{,}93$. **4.** $C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{5120}{19683}=0{,}26$; $P_{0,10}+P_{1,10}+P_{2,10}+P_{3,10}=0{,}56$; $C_{10}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6=0{,}2276$. **5.** 1) $\frac{1}{4}$ ir $\frac{7}{32}$ labiau tikėtina laimėti tris partijas iš keturių; 2) $\frac{5}{16}$ ir $\frac{93}{256}$ — labiau tikėtina laimėti ne mažiau kaip penkias partijas iš aštuonių.

8 skyrelis. 1. $M\xi_1=0{,}2$; $M\xi_2=1{,}8$; $M\xi_3=0{,}9$; $M\xi_4=-0{,}4$; $M\xi_5=1{,}3$.
2. 3,4. **3.** $-0{,}4$. **4.** 0,9. **5.** 2,2. **6.** $-8{,}6$. **7.** 7,1.

9 skyrelis.

1.

ξ_1	-5	-2	0	1	3	7
P	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1	0,1

ξ_2	-7	-1	0	3	4	5	10
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1

ξ_3	−6	−2	0	1	3	5
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,3

ξ_4	−7	−5	−3	0	4	6
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1

ξ_5	−5	0	1	7	10
P	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2

$\xi_4 \cdot \xi_5$	−70	0	15	35	40	42
P	0,1	0,5	0,1	0,1	0,1	0,1

3. $E_2 \cup E_6 \cup E_8$. **4.** $E_1 \cup E_5 \cup E_6 \cup E_9 \cup E_{10}$.
5. $E_1 \cup E_2 \cup E_6 \cup E_7 \cup E_{10}$. **6.** $E_4 \cup E_5 \cup E_8 \cup E_9$.

7. E_3. **8.** 0,2.

ξ	−3	0	1
P	0,5	0,3	0,2

10 skyrelis. 4. a) 39,04; b) 25,01 ir 31,45.

Apie programavimo kalbą

Pagrindinė ESM paskirtis — automatinis uždavinių sprendimas. Kad mašina galėtų išspręsti uždavinį, jo sprendimo algoritmą reikia aprašyti tokia kalba, kurią galėtų iššifruoti mašina. Toks aprašymas paprastai vadinamas programa. Kiekviena ESM turi savo programavimo kalbą. Iš pradžių, kai ESM buvo ką tik atsiradusios, ta kalba buvo vienintelė programavimo priemonė. ESM kalbą sudaro specialiu kodu užrašytų komandų rinkinys. Tokia kalba parašytoms programoms stinga matematinio vaizdumo, programos tekstas užšifruotas skaitmenimis. Sudarinėti jas ir stebėti jų vykdymą sunku dėl didelės techninio darbo apimties.

Pateiksime mašininio kodo taikymo pavyzdį. Sakykime, mašinos ląstelės sunumeruotos nuo 0 iki 3 777 aštuonetaine skaičiavimo sistema; sudėties operacijos kodas — 01, daugybos operacijos — kodas 03. Tarkime, kintamųjų *a*, *x*, *b*, *c* reikšmėms atitinkamai skirtos ląstelės 1001, 1002, 1003 ir 1004. Tada programos dalis iš dviejų mašinos komandų

03 1001 1002 1004
01 1004 1003 1004

nurodo atlikti veiksmus:

1) Sudauginami skaičiai, esantys 1 001 ir 1 002 ląstelėse, ir rezultatas siunčiamas į 1 004 ląstelę.

2) Sudedami skaičiai, esantys 1 004 ir 1 003 ląstelėje, ir rezultatas siunčiamas į 1 004 ląstelę.

Taigi šitomis komandomis faktiškai apskaičiuojama $c=ax+b$.

Kad būtų lengviau programuoti ir efektyviau bendrauti su ESM, buvo pradėtos kurti priemonės, padedančios suautomatinti programavimą. Atsirado specialių aptarnaujančiųjų programų. Kai kurios jų atlieka vertėjo iš vienos programavimo kalbos į kitą vaidmenį. Tokių programų dėka uždavinio sprendimą galima aprašyti vaizdžiau. Sakysime, tokia kalba, kai komandos vaizduojamos simboliais — operacijų ženklais, raidiniais kintamųjų žymėjimais ir t. t., — yra patogesnė aprašyti algoritmus.

Palyginkime su ankstesniu pavyzdžiu komandas, parašytas raidiniais žymėjimais:

$$\times \; a \; x \; c$$
$$+ \; c \; b \; c$$

Šiomis komandomis atliekama štai kas. Apskaičiuojama kintamųjų *a* ir *x* reikšmių sandauga ir rezultatas priskiriamas kin-

tamajam c. Po to prie gautojo rezultato pridedama kintamojo b reikšmė ir rezultatas priskiriamas kintamajam c. Taigi

$$c = ax + b.$$

Programavimas tokia kalba kartais vadinamas programavimu turiningaisiais, arba raidiniais, žymėjimais.

Pirmą kartą susipažįstant su programavimo elementais VIII klasės fakultatyviniame kurse, buvo pademonstruota mokomoji ESM. Buvo sudaryta tos mašinos kalba. Apskaičiuojant $c = ax + b$, mokomosios ESM komandomis galima užrašyti šitaip:

$$C := A \times X$$
$$C := C + B$$

Skaičiavimo procesų aprašymuose galima ryškiai išskirti tokias pagrindines sudėtines dalis:

1) pradinių duomenų įvedimas ir rezultatų išvedimas;
2) aritmetinių reiškinių reikšmių skaičiavimas;
3) veiksmų atlikimo nuoseklі tvarka;
4) išsišakojimai atliekant veiksmus;
5) daugkartinis veiksmų kartojimas.

Kalbos, skirtos algoritmams aprašyti, kartais vadinamos algoritminėmis kalbomis. Labiausiai paplitusios algoritminės kalbos yra FORTRANas, ALGOLas 60, BASICas ir kt. Programos vertimą iš vienos kalbos į kitą įprasta vadinti transliacija.

Mokomosios ESM kalba yra supaprastintos algoritminės kalbos pavyzdys. Išvardysime šios kalbos komandas:

PRADŽIA	
PABAIGA	
ĮVEDIMAS (*A*, *B*, ...)	*A*, *B* — kintamieji
IŠVEDIMAS (*A*, *B*, ...)	*l*
$C := A$	*C* — kintamasis
$C := A + B$	*A* ir *B* — kintamieji arba skaičiai
$C := A - B$	
$C := A \times B$	
$C := A/B$	
$C := A \uparrow B$	
Į *T*	*T* — numeris komandos, kuriai perduodamas valdymas
JEIGU *A* * *B* TAI Į *T*	Čia * reiškia bet kurį iš palyginimo ženklų $=$, $\neq$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, $>$; *A* ir *B* kintamieji arba skaičiai; *T* — numeris komandos, kuriai perduodamas valdymas, jeigu teisingas *A* * *B*

Mokomosios ESM kalbos priemonėmis (išvardytomis komandomis) vaizdžiai užrašomos įvedimo ir išvedimo komandos, aritmetinių veiksmų atlikimo komandos. Patogiai ir vaizdžiai patei-

kiamas skaičiavimo proceso šakojimasis. Ciklinis procesas organizuojamas, remiantis sąlygos patikrinimo komanda ir kartojimų skaičiaus skaitikliu.

Pateiksime mokomosios ESM kalba sudarytos programos pavyzdį. Programa skirta apskaičiuoti $Y=AX^3$ su 20 duotųjų kintamojo X reikšmių. Programoje kintamasis C vartojamas skaitikliui. Skaičiai — įvedimo komandoje nurodytų kintamųjų reikšmės — rašomi tuojau po programos. Čia nenurodinėsime jų konkrečių reikšmių, ir vietoj tų skaičių po programos parašysime daugtaškį.

Programa (vienas iš galimų variantų)

0. PRADŽIA
1. ĮVEDIMAS (A)
2. $C:=1$
3. ĮVEDIMAS (X)
4. $Y:=X\uparrow 3$
5. $Y:=A\times Y$
6. IŠVEDIMAS (Y)
7. Jeigu $C=20$ TAI Į 10
8. $C:=C+1$
9. Į 3
10. PABAIGA

. . .

Kyla tam tikrų sunkumų ir prarandamas vaizdumas, aprašant aritmetinio reiškinio reikšmės skaičiavimą, kai reiškinyje keletas veiksmų, ypač kai reikia įsiminti daug tarpinių rezultatų. Štai apskaičiuojant

$$D=B^2-4AC$$

reikšmę, prireikia pagalbinių kintamųjų; pavyzdžiui, kintamasis E žymi B^2, kintamasis F žymi $4AC$ (kartais pagalbiniais kintamaisiais gali būti duotieji kintamieji, pavyzdžiui A, B, C); tada duotojo reiškinio reikšmei apskaičiuoti galima parašyti tokią komandų eilę:

$$E:=B\uparrow 2$$
$$F:=A\times C$$
$$F:=4\times F$$
$$D:=E-F$$

Daugelyje algoritminių kalbų šių sunkumų nėra — yra papildomų galimybių skaičiavimo proceso pagrindinėms dalims tobuliau užrašyti ir jų tarpusavio ryšiui organizuoti, pilnai aprašant algoritmą.

Algoritminės kalbos ALGOLas 60 supaprastintasis variantas

Algoritminė kalba ALGOLas 60 buvo kuriama kelerius metus. Joje sukaupta visa geriausia (tarptautiniu mastu), ką turėjo įvairios algoritminės kalbos. Ji patogi, sprendžiant daugelį uždavinių, artima įprastinei uždavinių sprendimo aprašymo matematinei kalbai, nepriklauso nuo konkrečių ESM. Algoritminė kalba ALGOLas 60 pripažinta tarptautiniu mastu ir plačiai taikoma praktikoje.

Pavadinimas ALGOLas 60 sudarytas iš angliškų žodžių *algorithmic language* (algoritminė kalba) ir metų (1960, kuriais buvo paskelbtas oficialus pranešimas apie ją) santrumpų.

Apie ALGOLo 60 struktūrą. Algoritminėje kalboje ALGOLas 60 išvardyti visi simboliai, kuriuos galima vartoti aprašant algoritmus. Tie simboliai — tai raidės, skaičiai, įvairūs operacijų ženklai ir t. t. Toje kalboje taip pat nurodytos taisyklės, pagal kurias iš simbolių sudaromos vienos ar kitos algoritmo aprašo dalys. Užbaigtas algoritmo aprašas ta kalba vadinamas programa (algoline programa).

Programoje nurodoma, kokie kintamieji joje vartojami, kokius veiksmus reikia atlikti sprendžiant uždavinį ir kokia tų veiksmų atlikimo tvarka. Dažniausiai skaičiavimo procesas suskaidomas į kelis etapus. Kiekvienas etapas apima vieną ar kelis veiksmus, kuriuos reikia atlikti sprendžiant uždavinį. Tuos etapus įprasta vadinti operatoriais. Taigi operatoriai yra sudėtinės programos dalys.

Kai kuriuose operatoriuose yra aritmetinių reiškinių; savo ruožtu pastarieji yra sudaryti iš skaičių, kintamųjų, funkcijų.

ALGOLe išskiriama sveikųjų skaičių klasė. Su sveikaisiais skaičiais visi veiksmai atliekami tiksliai. Visi kiti skaičiai priskiriami realiųjų skaičių klasei. Šie skaičiai laikomi apytiksliais, ir veiksmai su jais atliekami apytiksliai, o tikslumo laipsnis priklauso nuo konkrečių sąlygų (nuo mašinos, transliatoriaus ir t. t.), ir į jį ALGOLe neatsižvelgiama.

Aritmetiniai reiškiniai. Daugelis skaičiavimo proceso veiksmų susiję su vieno ar kito aritmetinio reiškinio skaitinės reikšmės apskaičiavimu. Todėl į kai kuriuos operatorius įeina aritmetiniai reiškiniai. Panagrinėkime, kaip jie užrašomi ALGOLu.

Aritmetinių reiškinių užrašymas ALGOLu artimas matematikoje įprastai formai. Žinome, kad į aritmetinius ar algebrinius reiškinius įeina skaičiai, kintamieji ir tam tikros funkcijos, be to, vartojami lenktiniai, laužtiniai, riestiniai skliaustai ir leidžiama reiškinius rašyti keliais aukštais. O štai ALGOLu aritmetiniai reiškiniai užrašomi vienoje eilutėje (be aukštų), nurodant veiksmų tvarką gali būti vartojami tik lenktiniai skliaustai. Iš pradžių išsiaiškinsime aritmetinių reiškinių sudėtinių dalių užrašymo taisykles.

S k a i č i a i. Skaičiams užrašyti ALGOLu vartojami visi dešimt skaitmenų 0, 1, ..., 9, vietoj dešimtainio kablelio vartojamas taškas. Taškas ir minėti 10 skaitmenų yra ALGOLo simboliai. Sveikieji skaičiai užrašomi vienu ar keliais skaitmenimis; užrašant kitus skaičius, vartojamas simbolis „taškas", kuris skiria skaičiaus sveikąją dalį nuo trupmeninės dalies, pavyzdžiui:

125 — sveikasis skaičius 125;
12.7 — nesveikasis skaičius 12,7.

Prieš skaičių gali būti ženklas + arba —, kurie taip pat yra ALGOLo simboliai. Taigi skaičiai gali būti be ženklo arba su ženklu.

K i n t a m i e j i. ALGOLe plačiai vartojama kintamojo sąvoka. Kintamieji žymimi didžiosiomis ir mažosiomis lotynų kalbos raidėmis. Jos laikomos ALGOLo simboliais.

Be atskirų raidžių, kintamieji taip pat gali būti žymimi kuriuo nors raidžių ir skaitmenų rinkiniu. Pavyzdžiui, dvi raidės *ab*, parašytos viena po kitos, reiškia vieną kintamąjį. Šio užrašo negalima painioti su dviejų kintamųjų sandaugos žymėjimu, kai daugybos ženklas praleidžiamas. Analogiškai trys, keturios ir daugiau paeiliui parašytų raidžių reiškia vieną kintamąjį. Su tokiais žymėjimais tenka susidurti, žymint trigonometrines funkcijas, pavyzdžiui sinusą, kosinusą ir t. t. Taip žymėti labai patogu, nes tada galima žymėjimui suteikti tam tikrą turinį. Sakysime, apskaičiuojant plotą, galima vartoti kintamąjį PLOTAS, apskaičiuojant sumą — kintamąjį SUMA ir kt. Be raidžių, dar galima vartoti ir skaitmenis, tik kintamojo žymėjimas turi prasidėti raide. Taigi kvadratinės lygties šaknis galima žymėti kintamaisiais *x*1 ir *x*2. ALGOLo literatūroje vietoj žodžio „žymėjimas" dažnai vartojami žodžiai „vardas" arba „identifikatorius".

Taigi kintamieji žymimi identifikatoriais. Suformuluosime apibrėžimą: *identifikatoriumi vadinama bet kuri baigtinė raidžių ir skaitmenų seka, prasidedanti raide.* Pažymėsime, kad čia kol kas kalbama tik apie paprastuosius kintamuosius, būtent, apie kintamuosius, kurie nėra sekų elementai; apie pastaruosius kalbėsime vėliau.

F u n k c i j o s. Kai kurios dažnai vartojamos funkcijos vadinamos standartinėmis funkcijomis. Pažymėkime funkcijos argumentą *E* ir užrašykime kai kurias standartines funkcijas:

sin(*E*) — reikšmės *E* sinusas;
cos(*E*) — reikšmės *E* kosinusas;
arctan(*E*) — reikšmės *E* arktangentas;
abs(*E*) — reikšmės *E* absoliutusis didumas;
sqrt(*E*) — kvadratinė šaknis [1] iš reikšmės *E*.

[1] *sqrt* — angliškų žodžių *square root* (kadratinė šaknis) santrumpa.

Matome, kad funkcijos užraše argumentas būtinai suskliaučiamas lenktiniais skliaustais. Prieš lenktinius skliaustus eina funkcijos pavadinimas, t. y. jos žymėjimas, arba identifikatorius. Identifikatoriai *sin, cos, arctan, abs, sqrt* priskiriami standartinėms funkcijoms ir negali būti vartojami kitais tikslais [1]. Argumentu gali būti skaičius, kintamasis ir apskritai bet kuris aritmetinis reiškinys. Sudėtingesnių argumentų pavyzdžių pateiksime kiek vėliau. Kiekvienos išvardytųjų funkcijų prasmė yra įprastinė. Sinuso ir kosinuso funkcijų argumentai turi būti išreikšti radianiniu matu.

A r i t m e t i n i a i r e i š k i n i a i. Iš skaičių, kintamųjų ir funkcijų su aritmetiniais ženklais ir lenktiniais skliaustais sudaromi aritmetiniai reiškiniai. Kiekvienas atskiras skaičius, kintamasis, funkcija (su ženklu prieš juos ar be ženklo) yra atskiri aritmetinio reiškinio atvejai. Veiksmų tvarkai nustatyti vartojami tik lenktiniai skliaustai. Aritmetinių operacijų ženklai priklauso ALGOLo simboliams. Vartojamos tokios aritmetinės operacijos:

$+$ sudėtis;
$-$ atimtis;
$\times$ daugyba;
/ dalyba;
$\div$ sveikoji dalyba;
$\uparrow$ kėlimas laipsniu.

Operacijos atliekamos ta pačia tvarka, kaip ir paprastoje algebroje.

Prie operacijų taikymo ypatumų galima priskirti šiuos. Daugybos operacijos ženklo praleisti negalima. Draudžiama vietoj jo vartoti kokį nors kitą, pavyzdžiui tašką. Dalyba vaizduojama pasviruoju brūkšniu, trupmenos brūkšnio ženklas ar dvitaškio ženklas dalybos prasme nevartojami.

Sveikosios dalybos aritmetine operacija galima gauti dalmenį, vieną sveikąjį skaičių dalijant iš kito su liekana.

Kėlimas laipsniu, pavyzdžiui, 2^3 ar a^b ALGOLu užrašomas vienoje eilutėje, būtent $2\uparrow 3$ ar $a\uparrow b$. Negalima, kad du operacijų ženklai užrašant eitų paeiliui. Pavyzdžiui, 2^{-3} reikia rašyti taip: $2\uparrow(-3)$.

Pateiksime aritmetinių reiškinių užrašymo ALGOLu pavyzdžių (dešinėje matematiniai reiškiniai užrašomi įprastu būdu):

1. −0.2	−0,2
2. *pi*	π
3. 2/(*abs*(*x*)+1)	$2:(\lvert x\rvert+1)$ arba $\frac{2}{\lvert x\rvert+1}$
4. (*a*+*b*)↑0,5	$\sqrt{a+b}$ arba $(a+b)^{\frac{1}{2}}$
5. *sqrt*(*b*↑2−4×*a*×*c*)	$\sqrt{b^2-4ac}$

[1] Kitos ALGOLO standartinės funkcijos šioje knygoje nenagrinėjamos. Joms priskiriami identifikatoriai *sign, ln, exp, entier.*

Pagrindiniai operatoriai. Nurodymai atliekant kokius nors veiksmus ALGOLu vadinami operatoriais. Pateiksime keletą pagrindinių ALGOLo operatorių.

P r i s k y r i m o o p e r a t o r i u s. Priskyrimo operatoriumi atitinkamas aritmetinis reiškinys priskiriamas kuriam nors kintamajam. Priskyrimo operatorius apima simbolį „: =“ (priskyrimo ženklas), jo kairėje rašomą kintamąjį ir jo dešinėje rašomą aritmetinį reiškinį; pavyzdžiui, užrašas $c := a+b$ reiškia, kad kintamajam c priskiriama aritmetinio reiškinio $a+b$ reikšmė. Atsižvelgdami į tai, kad skaičiai, kintamieji, funkcijos taip pat yra aritmetiniai reiškiniai, galima parašyti tokius operatorius:

$$x := 0$$
$$a := -2.3$$
$$c := x$$
$$p := abs(x+y)$$
$$x := x+2$$

Tų operatorių prasmė akivaizdi.

Pažymėję kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknis x ir y, galime užrašyti tokius x ir y apskaičiavimo operatorius:

$$x := (-b+sqrt(b\uparrow 2-4\times a\times c))/(2\times a)$$
$$y := (-b-sqrt(b\uparrow 2-4\times a\times c))/(2\times a)$$

Į v e d i m o o p e r a t o r i u s. Įvedimo operatoriumi uždavinio pradiniai duomenys įvedami į mašiną. Įvedimo operatorius užrašomas žodžiu *įvedimas,* po kurio lenktiniuose skliaustuose nurodomas vienas ar keli kintamieji, vienas nuo kito atskirti kableliais, pavyzdžiui:

įvedimas (k, x, p, c)
įvedimas (e)

Įvedimo operatoriumi į mašiną įvedami vienas ar keli skaičiai, atitinkantys šio operatoriaus nurodytų kintamųjų reikšmes.

I š v e d i m o o p e r a t o r i u s. Išvedimo operatoriumi išvedamos jame nurodytų kintamųjų reikšmės. Išvedimo operatorius užrašomas žodžiu *išvedimas,* po jo lenktiniuose skliaustuose nurodomas vienas ar keli kintamieji, vienas nuo kito atskirti kableliu, pavyzdžiui:

išvedimas (a)
išvedimas (b, c, e)

Vieną įvedimo ar išvedimo operatorių su keliais kintamaisiais galima pakeisti keliais atitinkamais operatoriais su mažesniu kintamųjų skaičiumi. Analogiškai galima sujungti keletą įvedimo ar išvedimo operatorių, sudarius vieną operatorių su didesniu kintamųjų skaičiumi.

Taigi pateiktuose pavyzdžiuose buvo galima užrašyti operatorius

įvedimas (k, x); *įvedimas* (p); *įvedimas* (c); *įvedimas* (e)

arba

įvedimas (k, x, p, c, e)

ir t. t. Analogiškai išvedimo operatoriams:

išvedimas (a); *išvedimas* (b, c); *išvedimas* (e)

arba

išvedimas (a, b, c, e)

ir t. t.

Paprasčiausios programos. Išnagrinėtų aritmetinių reiškinių, priskyrimo, įvedimo ir išvedimo operatorių jau užtenka algolinėms programoms (žinoma, pačioms paprasčiausioms) sudaryti.

Kaip sudaroma programa? Programos pradžia yra simbolis **begin**, programos pabaiga — simbolis **end**[1]. Tarp jų surašomi uždavinio sprendimui reikalingi operatoriai. Visi programoje pasitaikantys kintamieji turi būti aprašyti, kitaip sakant,— turėti tam tikras charakteristikas. Tokia charakteristika yra kintamojo tipas: sveikasis ar realusis. Kintamieji aprašomi programos pradžioje prieš operatorius. Aprašą sudaro simboliai **integer** arba **real**, po kurių surašomas vienas ar keli kintamieji, vienas nuo kito atskirti kableliu. Pateiksime aprašų pavyzdžių:

integer i, j, k;
real c

Aprašai vienas nuo kito ir nuo operatorių skiriami kabliataškiu. Operatoriai vienas nuo kito taip pat skiriami kabliataškiu.

Bendruoju atveju programą galima pavaizduoti taip: **begin** aprašas; . . . ; aprašas; operatorius; . . . ; operatorius **end.**

Čia daugtaškiu pažymėti arba keli aprašai, arba keli operatoriai. Kiekvienas kintamasis turi būti aprašytas vieną kartą. Operatoriai atliekami jų surašymo tvarka. Apie operatorių atlikimo tvarkos pakeitimą bus pasakyta vėliau.

Išnagrinėkime kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknų skaičiavimo programą, žinodami, kad šaknys realios. Sudarykime programą. Lygties šaknis pažymėkime x ir y.

Programa[2]

1. **begin**
2. **real** x, y, a, b, c;
3. *įvedimas* (a, b, c);
4. $x := (-b+sqrt(b\uparrow 2-4\times a\times c))/(2\times a)$;

---

[1] Tokius simbolius, kaip **begin, end, integer, real** vadinsime tarnybiniais žodžiais. Toliau pasitaikys dar keli tarnybiniai ALGOLo žodžiai. Tarnybinius žodžius spausdintame tekste išskiriame pusjuodžiu šriftu, rankraštyje pabraukiame. Beje, angliškai **begin** — pradžia, **end** — pabaiga, **integer** — sveikas, **real** — realusis. Ir kiti tarnybiniai žodžiai yra angliški.

[2] Kad būtų patogiau aiškinti, programos eilutės sunumeruotos (numeriai surašyti kairėje, jie nepriklauso programai).

```
5. y := (-b+sqrt(b↑2-4×a×c))/(2×a);
6. išvedimas (x, y);
7. end
```

Šioje programoje dukart apskaičiuojamas palyginti sudėtingas aritmetinis reiškinys — kvadratinė šaknis iš lygties diskriminanto. Norint to išvengti, užtenka papildomai turėti dar vieną kintamąjį, pavyzdžiui *d*, reikšmei $\sqrt{b^2-4ac}$ saugoti. Programoje taip pat dukart pasitaiko reiškinys $2\times a$. Šiuo atveju skaičiavimų ekonomija įvedant papildomą kintamąjį vargu ar tikslinga. Užrašykime programą taip:

```
1. begin
2. real x, y, a, b, c, d;
3. įvedimas (a, b, c);
4. d := sqrt (b↑2-4×a×c);
5. x := (-b+d)/(2×a);
6. y := (-b-d)/(2×a);
7. išvedimas (x, y);
8. end
```

Šioje programoje kvadratinės šaknies iš diskriminanto reikšmė apskaičiuojama vieną kartą (4 eilutė). Vėliau *d* reikšmė panaudojama lygties šaknims *x* ir *y* (5—6 eilutė) apskaičiuoti.

Šuolio operatorius ir tuščiasis operatorius. Šuolio operatoriumi galima nutraukti nuoseklų operatorių atlikimą ir pereiti prie operatoriaus su vienu ar kitu žymeniu. Šuolio operatorių sudaro simbolis **goto**, kuris reiškia „pereiti prie"; po jo nurodomas operatoriaus, prie kurio reikia pereiti, žymuo, pavyzdžiui,

goto *M*1

Šiuo šuolio operatoriumi pereinama į operatorių su žymeniu *M*1. Panagrinėkime programos dalį, kurioje yra tiek šis šuolio operatorius, tiek tam tikras operatorius su minėtu žymeniu. Operatoriaus žymuo nuo jo skiriamas dvitaškiu: *a* := *b*; *c* := *c*+*a*; **goto** *M*1; *b* := *c*+2; *išvedimas* (*b*); *M*1 : *išvedimas* (*c*).

Šioje programos dalyje yra 6 operatoriai. Pirmi du priskyrimo operatoriai atliekami natūralia tvarka, po to šuolio operatorius daro šuolį į operatorių su žymeniu *M*1, t. y. praleidžiami operatoriai *b* := *c*+2; *išvedimas* (*b*) ir pradeda dirbti reikšmės *c* išvedimo operatorius, pažymėtas tuo žymeniu, būtent operatorius *M*1 : *išvedimas* (*c*).

Tuščiasis operatorius nenurodo jokio veiksmo. Dažniausiai jis vartojamas įrašyti žymeniui reikiamoje programos dalyje. Tuščiasis operatorius atpažįstamas kaip simbolių nebuvimas. Operatoriai vienas nuo kito skiriami kabliataškiais, todėl tuščiojo operatoriaus pavyzdžiu gali būti tuščiasis operatorius, esantis tarp dviejų kabliataškių:

...; ; ...

Šį tuščiąjį operatorių pažymėjus žymeniu $M2$, užrašas atrodys taip:

$$\ldots; M2 : ; \ldots$$

Taigi šioje programos vietoje įrašėme žymenį $M2$. Žymuo yra identifikatorius.

Sąlyginiai operatoriai. Nuoseklų operatorių atlikimą galima pakeisti sąlyginiais operatoriais. Tie operatoriai patikrina, ar įvykdytos tam tikros sąlygos, ir priklausomai nuo patikrinimo rezultato nustato tolesnių skaičiavimų tvarką.

Sąlyginį operatorių bendruoju atveju galima užrašyti taip:

JEIGU sąlyga TAI operatorius 1 KITAIP operatorius 2

Jeigu sąlyga įvykdyta, dirba operatorius 1. Jeigu sąlyga nepatenkinama, tai dirba operatorius 2. Taigi sąlyginio operatoriaus atlikimas reiškia vieno iš dviejų operatorių darbą. Kaip sąlygas galima nagrinėti dviejų aritmetinių reiškinių sąryšius, pavyzdžiui,— kintamųjų ar skaičių sąryšius. Sąlygose vartosime ALGOLo simbolius $=$, $\neq$, $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, kurie yra sąryšio ženklai. Štai sąryšių, arba sąlygų, pavyzdžiui:

$b=d$
$a\neq 0$
$2=7$
$2\neq 7$
$c\leqslant a+b$
$a+b>1+x-abs(y)$

Ar sąlyga teisinga, ar klaidinga (t. y. įvykdyta ji ar ne) galima nustatyti, palyginus tos sąlygos aritmetinių reiškinių reikšmes. Štai trečiojo pavyzdžio sąlyga klaidinga, o ketvirtojo — teisinga. Norint nustatyti, teisinga ar klaidinga kitų pavyzdžių sąlyga, reikia žinoti kintamųjų reikšmes. Žodžius JEIGU, TAI, KITAIP iš sąlyginio operatoriaus schemos atitinka ALGOLo simboliai[1] **if, then, else.** Todėl sąlyginį operatorių bendruoju atveju galima užrašyti ir taip:

if sąryšis **then** operatorius 1 **else** operatorius 2

Pateiksime keletą sąlyginių operatorių pavyzdžių.

1 pavyzdys. Sakykime, funkcija apibrėžta taip:

$$y=\begin{cases}0, \text{ kai } x\leqslant 0,\\ x, \text{ kai } x>0.\end{cases}$$

Kintamojo x reikšmės apskaičiavimą galima aprašyti sąlyginiu operatoriumi

if $x\leqslant 0$ **then** $y:=0$ **else** $y:=x$

arba tokiu sąlyginiu operatoriumi

if $x>0$ **then** $y:=x$ **else** $y:=0$

[1] Angliškai **if**, reiškia jeigu, **then** — tai, **else** — priešingu atveju.

2 pavyzdys. Išvesti ir atspausdinti didesnę iš a ir b reikšmių:

if $a \geqslant b$ **then** *išvedimas* (a) ***else*** *išvedimas* (b)

3 pavyzdys.

if $d \geqslant 0$ **then** $d := sqrt\ (d)$ **else goto** M

4 pavyzdys:

if $d=0$ **then goto** $M1$ **else goto** $M2$

ALGOLe leidžiama vartoti ir sąlyginio operatoriaus trumpąją formą:

if sąryšis **then** operatorius 1

Ši konstrukcija ekvivalenti sąlyginio operatoriaus pilnajai formai, kurioje operatorius 2, einantis po simbolio **else**, yra tuščiasis operatorius. Pateiksime sąlyginio operatoriaus trumposios formos pavyzdžių.

1 pavyzdys

if $a=0$ **then goto** $S1$

2 pavyzdys

if $a \neq 0$ **then** $x := b/a$

Sakykime, reikia apskaičiuoti $y=|x|$. Tai galima atlikti sąlyginiu operatoriumi:

if $x \geqslant 0$ **then** $y := x$ **else** $y := -x$.

Matome, kad sąlyginiu operatoriumi apibrėžiama absoliučiosios reikšmės apskaičiavimo funkcija. ALGOLe tą patį galima atlikti operatoriumi: $y := abs(x)$. Kartais pravartu funkcijos $abs(x)$ apskaičiavimą pakeisti sąlyginiu operatoriumi.

Sąlyginiame operatoriuje po simbolių **then** ir **else** leidžiama rašyti tik po vieną operatorių. Vis dėlto skaičiuojant kartais tenka atlikti kelis operatorius.

ALGOLe numatyta galimybė keletą operatorių sujungti į vieną. Tai atliekama sudėtiniu operatoriumi.

Sudėtinis operatorius. Sudėtinis operatorius atrodo taip:

begin operatorių grupė **end**

Operatorių grupę sudaro arba vienas operatorius, arba keli operatoriai, vienas nuo kito atskirti simboliu „kabliataškis". Sudėtinių operatorių pavyzdžiai:

1 pavyzdys. Sudėtinis operatorius, turintis vieną tuščiąjį operatorių:

begin end

2 pavyzdys. Sudėtinis operatorius, turintis du operatorius:

begin $x := b/a$; **goto** M **end**

3 pavyzdys. Sudėtinis operatorius, turintis tris operatorius:

begin $x := a$; $y := b$; **išvedimas** (a, b) **end**

4 pavyzdys. Sudėtinis operatorius, turintis vieną sąlyginį operatorių:

begin if $a<b$ **then** $y:=a$ **else** $y:=b$ **end**

Panagrinėsime keletą programų, kuriose vartojami sąlyginiai operatoriai.

Uždavinys. Iš dviejų duotųjų skaičių išrinkite didesnį. Duotuosius skaičius pažymėkime a ir b, rezultatą — y.

Programa

1. **begin**
2. **real** *a*, *b*, *y*;
3. *įvedimas* (*a*, *b*);
4. **if** $a \geqslant b$ **then** $y:=a$ **else** $y:=b$;
5. *išvedimas* (*y*)
6. **end**

Taikant trumpąją sąlyginio operatoriaus formą, galima sudaryti kitą programą.

Programa

1. **begin**
2. **real** *a*, *b*, *y*;
3. *įvedimas* (*a*, *b*);
4. $y=a$;
5. **if** $b>a$ **then** $y:=b$;
6. *išvedimas* (*y*)
7. **end**

Šioje programoje iš pradžių kintamajam y priskiriama kintamojo a reikšmė. Sąlyginiame operatoriuje (5 eilutė) kintamajam y priskiriama kintamojo b reikšmė, jeigu paaiškėja, kad a mažesnis už b. Jeigu a didesnis ar lygus b, tai y liks anksčiau priskirtoji reikšmė a. Taikant abi šias programas, gaunamas tas pats rezultatas. Praktiškai jos ekvivalenčios, ir vienos ar kitos pasirinkimas priklauso nuo programuotojo noro bei skonio.

Uždavinys. Apskaičiuokite kvadratinės lygties ax^2+bx+ $+c=0$ šaknis (tiriant diskriminantą). Nario su x^2 koeficientas nelygus nuliui.

Lygties koeficientus pažymėkime a, b, c; lygties šaknis — $x1$, $x2$; pagalbinius kintamuosius tarpiniams skaičiavimų rezultatams — d, e, (d — diskriminantas). Susitarsime spausdinti tokią informaciją. Jeigu d neigiamas, tai atspausdinsime vieną neigiamąjį skaičių, būtent, apskaičiuotąją diskriminanto reikšmę. Jeigu šaknys realios, atspausdinsime dvi reikšmes (šaknis); atvejo, kai šaknys sutampa, t. y. $d=0$, specialiai neišskirsime — atspausdinsime dvi vienodas reikšmes.

Programa

1. **begin real** *a*, *b*, *c*, *x*1, *x*2, *d*, *e*;
2. *įvedimas* (*a*, *b*, *c*); $d:=b\uparrow 2-4\times a\times c$;

3. **if** $d<0$ **then**
4. **begin** *išvedimas* (d); **goto** *pabaiga* **end;**
5. $d := sqrt(d)$;
6. $e := 2 \times a$;
7. $x1 := (-b+d)/e$; $x2 := (-b-d)/e$;
8. *išvedimas* $(x1, x2)$;
9. *pabaiga:* **end**

Išnagrinėjome programas, kuriose buvo vartojami įvairūs sąlyginiai operatoriai. Kaip matėme iš bendrosios schemos, į sąlyginio operatoriaus konstrukciją įeina kiti operatoriai; būtent, po simbolio **then** yra tam tikras operatorius 1, o po simbolio **else** — operatorius 2. Kokie operatoriai gali būti operatoriumi 1 ar operatoriumi 2? Operatoriumi 2 gali būti bet kuris operatorius, t. y. po simbolio **else** galima parašyti bet kurį operatorių. O štai operatoriui 1, einančiam po simbolio **then,** yra draudimas: vietoj jo negalima rašyti sąlyginio operatoriaus ir ciklo operatoriaus (apie pastarąjį kalbėsime vėliau). Šis apribojimas yra neesminis, formalus. Juk kiekvienas sąlyginis operatorius, kaip ir kiekvienas kitas, būdamas tarp simbolių **begin** ir **end,** pavirs sudėtiniu.

Uždavinys. Duota atkarpa $[c, d]$; nustatykite, ar duotasis skaičius a priklauso atkarpai $[c, d]$. Jeigu priklauso, reikia atspausdinti 1, priešingu atveju — 0.

Sudarykime programą, vartodami šiuos žymėjimus:

c ir d — atkarpos pradžia ir galas; a — duotasis skaičius; p — požymis.

Programa

1. **begin real** a, c, d; **integer** p;
2. **įvedimas** (a, c, d); $p := 0$;
3. **if** $a \geqslant c$ **then**
4. **begin if** $a \leqslant d$ **then** $p := 1$ **end;**
5. *išvedimas* (p) **end**

Čia pavartota sąlyginio operatoriaus trumpoji forma. Sąlyginis operatorius užima 3—4 eilutes. Po simbolio **then** eina sudėtinis operatorius, sudarytas iš vieno sąlyginio operatoriaus — 4 eilutė. Kai a daugiau ar lygu c, reikia a reikšmę palyginti su d reikšme. Kadangi po simbolio **then** iš karto negalima rašyti sąlyginio operatoriaus, tai vietoj sąlyginio operatoriaus parašėme sudėtinį, formaliai įterpę vidinį sąlyginį operatorių tarp simbolių **begin** ir **end.** Programa atliekama taip. Iš pradžių pradedama nuo $p=0$. Po to, jeigu paaiškėja, kad $c \leqslant a \leqslant d$, tai p priskiriama reikšmė 1. Paaiškinsime sąlyginio operatoriaus (3—4 eilutės) darbą. Jeigu a mažiau už c, t. y. a nepriklauso duotajai atkarpai, tai operatorius dirbs tuščiai, p bus lygus 0. Jeigu a ne mažiau už c, tai nagrinėjamas sudėtinis operatorius 4 eilutėje. Sudėtiniame operatoriuje, naudojant sąlyginį operatorių, tikrinama nauja sąlyga. Jeigu a daugiau už d, tai sąlyginis operatorius

nepakeis p reikšmės, ir iš sąlyginio operatoriaus išeisime (a vėl nepriklauso atkarpai). O jeigu a mažiau arba lygu d, tai p įgis reikšmę 1, t. y. a priklauso atkarpai.

Uždavinys. Apskaičiuokite funkcijos reikšmę, kai duota argumento reikšmė. Funkcija apibrėžta taip:

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & \text{kai } x<-1,\\ x^2, & \text{kai } -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 4, & \text{kai } x>2.\end{cases}$$

Sudarysime tos funkcijos reikšmės skaičiavimo programą.

Programa

1. **begin real** *x*, *y*; *įvedimas* (*x*);
2. **if** $x<-1$ **then** $y:=1/x\uparrow 2$ **else**
3. **if** $x\leqslant 2$ **then** $y:=x\uparrow 2$ **else** $y:=4$;
4. *išvedimas* (*y*) **end**

Galima pasiūlyti kitą programos variantą, kai vietoj sąlyginio operatoriaus (2—3 eilutės), kurio viduje yra sąlyginis operatorius (3 eilutė), vartojami paprastesnės struktūros sąlyginiai operatoriai. Antrajame variante panaudosime žymenį „išėjimas", žymintį išvedimo operatorių programos pabaigoje. Naujoji programa atrodo taip:

Programa

1. **begin real** *x*, *y*; *įvedimas* (*x*);
2. **if** $x<-1$ **then begin** $y:=1/x\uparrow 2$; **goto** *išėjimas* **end;**
3. **if** $x\leqslant 2$ **then begin** $y:=x\uparrow 2$; **goto** *išėjimas* **end;**
4. $y:=4$;
5. *išėjimas: išvedimas* (*y*) **end**

Šį programos variantą lengviau išnagrinėti, bet jis ne toks kompaktiškas kaip ankstesnis. Beje, antroje programoje faktiškai iššifruojamas (paaiškinamas) pirmos programos sąlyginio operatoriaus (2—3 eilutės) darbas, o aiškinama vartojant ALGOLo operatorius.

Ciklo operatoriai. Vieno ar kito operatoriaus veikimą galima kartoti daug kartų, vartojant vadinamąjį ciklo operatorių. Ciklo operatoriaus struktūrą schemiškai galima pavaizduoti taip:

for $p:=A$ **step** B **until** C **do** S

Čia panaudoti ALGOLo simboliai, kurie atitinkamai reiškia: **for** — dėl, **step** — žingsnis, **until** — iki, **do** — atlikti. Šiame cikle operatoriaus užraše raidės p, A, B, C, S trumpai išreiškia:

p — ciklo parametrą; A, B, C — aritmetinius reiškinius; S — bet kurį ALGOLo operatorių.

Ciklo parametru gali būti bet kuris paprastasis kintamasis. Ciklo parametras įgyja aritmetinio reiškinio A reikšmę, po to $A+B$ reikšmę, paskui $A+2B$ reikšmę ir t. t., kol ta reikšmė pasi-

darys didesnė už C reikšmę. Su kiekviena ciklo parametro reikšme, ne didesne už C, atliekamas operatorius S.

Laikoma, kad aritmetiniai reiškiniai A, B, C nepriklauso nuo paprastojo kintamojo p ir, be to, atliekant operatorių S, nekinta p, A, B, C reikšmės.

Ciklo operatoriaus pavyzdys:

```
for t := 10 step 5 until 35 do išvedimas (t)
```

Šis ciklo operatorius veikia taip. Kai ciklo parametro t reikšmės lygios 10, 15, 20, 25, 30, 35, dirba išvedimo operatorius, t. y. spausdinamos t reikšmės. Taigi čia ciklo operatorius priverčia operatorių *išvedimas* (t) veikti šešis kartus.

Pateiksime programų su ciklo operatoriumi pavyzdžių.

1 pavyzdys. Apskaičiuokite funkcijos $y=x^3-1$ reikšmes duotoms 10 argumento reikšmių.

Sudarykime programą, kurioje reikiamą skaičių kartų bus atliekamas argumento reikšmės įvedimo operatorius:

```
begin integer p; real x, y;
   for p := 1 step 1 until 10 do
   begin įvedimas (x); y := x↑3−1; išvedimas (y) end
end
```

Šioje programoje ciklo operatorius dešimt kartų atlieka sudėtinį operatorių. Sudėtiniame operatoriuje kiekvieną kartą įvedama argumento reikšmė, apskaičiuojama funkcijos reikšmė ir išvedamas atitinkamas rezultatas.

2 pavyzdys. Apskaičiuokite lyginių skaičių nuo 20 iki 30 kvadratų sumą.

Ieškomąją sumą pažymėkime kintamuoju s:

```
begin integer p; real s; s := 0;
   for p := 20 step 2 until 30 do s := s+p↑2;
   išvedimas (s) end
```

Šioje programoje kintamajam s prieš sumuojant priskiriama reikšmė 0. Ciklo operatoriuje sumuojama, t. y. operatorius

$s := s+p\uparrow 2$ dirba su reikšmėmis $p=20, 22, 24, 26, 28, 30$.

Atlikus ciklo operatorių, išvedama apskaičiuotoji suma.

3 pavyzdys. Gaukite skaičių nuo 1 iki 20 su žingsniu 0,001 kvadratinių šaknų reikšmes:

```
begin real, x, y;
   for x := 1 step 0,001 until 20 do
      begin y := sqrt (x); išvedimas (y) end
end
```

Aritmetinių reiškinių skaitinių reikšmių tipai. Kaip jau buvo minėta, ALGOLe išskiriama sveikųjų skaičių klasė; kintamieji, įgyjantys sveikąsias skaitines reikšmes, yra **integer** tipo. Šio tipo

skaitinės reikšmės išreiškiamos tiksliai, o **real** tipo skaitinės reikšmės gali būti išreikštos su tam tikra skaitine paklaida, priklausančia nuo konkrečios realizacijos ir nenumatyta ALGOLo.

Jeigu kintamasis *A* yra sveikojo tipo, tai, pavyzdžiui, jo reikšmė, lygi dviem, bus užrašyta kaip sveikasis skaičius 2. Jeigu kintamasis *A* yra realiojo tipo, tai jo reikšmė, lygi dviem, gali būti pavaizduota skaičiumi **real** tipo ir užrašyta kaip 2.0, arba 1.99999999, arba 2.0000000001 ir t. t.

Atliekant veiksmus, rezultato tipas priklauso nuo tipo dydžių, su kuriais atliekami veiksmai. Rezultato tipas nustatomas pagal šias taisykles:

1) Operacijų $+$, $-$, $\times$ rezultatas yra sveikojo tipo, jeigu abu operandai yra sveikojo tipo; kitais atvejais — realiojo tipo.

2) Po dalijimo operacijos visada gauname **real** tipo rezultatą.

3) Sveikojo dalijimo operacija taikoma tik sveikiesiems skaičiams ir po jos visada gauname **integer** tipo rezultatą.

4) Rezultatas $A \uparrow B$ yra sveikojo tipo, jeigu *A* ir *B* yra sveikojo tipo, o *B* neneigiamas; kitais atvejais — realiojo tipo.

Anksčiau minėtos standartinės funkcijos yra **real** tipo.

P a v y z d y s. Apskaičiuojant aritmetinės progresijos, kurios visi nariai sveikieji skaičiai, *n*-tojo nario reikšmę, galima taikyti, pavyzdžiui, tokį operatorių: $AP := A1 + D \times (P-1)$, kurio visi dydžiai yra sveikojo tipo. Aišku, kad aritmetinio reiškinio reikšmė yra sveika. Operatoriuje ta reikšmė priskiriama kintamajam *AP*, kuris yra **integer** tipo.

Blokai. ALGOLe plačiai taikoma bloko sąvoka. Blokas gali reikšti arba visą programą, arba jos dalį. Bloką sudaro aprašai ir operatoriai; iš pradžių eina aprašai, po to operatoriai. Aprašai vienas nuo kito ir nuo operatorių skiriami simboliu „;“ (kabliataškiu). Anksčiau nurodyta programos schema sutampa su bloko bendrąja forma. Kiekvienas programoje vartojamas kintamasis turi būti aprašytas. Aprašas taikomas tik atitinkamame bloke, kuris prasideda simboliu **begin** ir baigiasi simboliu **end** (tarp tų simbolių iš karto po **begin** eina reikiamas aprašas). Blokas yra vienas iš ALGOLo operatorių.

Skaičių masyvai. Matematikoje kokios nors sekos elementai paprastai žymimi raide su indeksu apačioje, pavyzdžiui

$$a_1, a_2, \ldots, a_{20}, \ldots$$

Indeksas nurodo elemento eilės numerį sekoje. ALGOLe nagrinėjamos įvairios baigtinės skaičių sekos, vadinamos masyvais. Kiekvienas masyvo elementas žymimas kintamuoju su indeksu. Visi vieno masyvo kintamieji vaizduojami tuo pačiu identifikatoriumi, kurį įprasta vadinti masyvo identifikatoriumi. Kintamojo indeksas nurodomas po kintamojo žymėjimo ir rašomas laužtiniuose skliaustuose. Sakysime, masyvą iš 20 elementų, pažymėtą identifikatoriumi *a*, galima parašyti taip:

$a[1], a[2], \ldots, a[20]$

Laužtiniai skliaustai yra ALGOLo simboliai. Programoje kintamojo indeksu gali būti skaičius, kintamasis ir apskritai aritmetinis reiškinys. Sakysime, $a[p]$, kai $p=5$, reiškia elementą $a[5]$.

Masyvų aprašymas. Bloke ar programoje yra masyvų aprašai, į kuriuos įeina žinios apie masyvus: sveikieji ar ne jų elementai, kiek tų elementų yra ir kaip pažymėti masyvai. Aprašą sudaro simbolis **array** (tai reiškia masyvą), prieš kurį rašomas simbolis **integer** (kai masyvą sudaro sveikieji skaičiai) ar simbolis **real** (kai masyvą sudaro realieji skaičiai). Po simbolio **array** rašomas masyvo identifikatorius, po to laužtiniuose skliaustuose nurodomas pirmas ir paskutinis masyvo elementų numeris; tie numeriai atskiriami dvitaškiu, pavyzdžiui:

integer array $a[1:20]$
real array $a[1:20]$

To paties tipo masyvų aprašus, taip pat vienodus masyvų ilgius galima užrašyti kompaktiškiau, pavyzdžiui:

integer array $a1[1:20]$, $b1$, $c1[1:10]$
real array $a2$, $b2[1:50]$, $c2[1:2]$

Pirmasis masyvų aprašas reiškia, kad masyvai, pažymėti $a1$, $b1$, $c1$, yra sveikųjų elementų masyvai; be to, masyvas $a1$ turi 20 elementų, o masyvai $b1$ ir $c1$ — vienodą elementų skaičių, būtent po 10 elementų.

Antrasis masyvų aprašas reiškia, kad masyvai, pažymėti $a2$, $b2$, $c2$, yra realiųjų elementų masyvai; be to, masyvai $a2$ ir $b2$ turi vienodą elementų skaičių — po 50 elementų, o masyvas $c2$ turi du elementus.

Masyvo apraše elemento numeris gali būti ne skaičius, o kintamasis ir apskritai aritmetinis reiškinys. Pavyzdžiui, masyvo aprašas gali būti toks:

integer array $a[1:p]$

Šis aprašas informuoja, kad masyvas turi p elementų. Blokas su tokiu masyvo aprašu negali būti programa, nes p reikšmė būtų nenurodyta. Programos dalyje, einančioje prieš tą aprašą, turi būti nurodyta p reikšmė ir aprašytas p. Taigi šis blokas yra programos dalis. Tiksliau kalbant, jis yra viduje bloko, kuris jau yra programa.

Išnagrinėkime nesudėtingą pavyzdį programos, kurioje yra aprašai ir atitinkami blokai:

begin integer p; *įvedimas* (p); **begin integer array** $a[1:p]$;
įvedimas (a); *išvedimas* (p, a) **end end**

Čia išorinis blokas yra programa, jo pradžioje aprašytas kintamasis p, po to eina p įvedimo operatorius, toliau naujas blokas. Vidinio bloko darbo pradžios momentu kintamasis p jau yra įgi-

jęs konkrečią reikšmę, gautą p įvedimo operatoriaus darbo dėka. Vidiniame bloke, kuris kartu yra ir operatorius, aprašytas identifikatoriumi a pažymėtas masyvas. Tas aprašas nurodo masyvo a ilgį priklausomai nuo p duotos reikšmės, t. y. aprašytas masyvas su kintama paskutinio elemento numerio reikšme. Vidiniame bloke yra aprašas ir du operatoriai. Pirmas operatorius įveda masyvą, nes jame nurodytas masyvo identifikatorius. Šis operatorius įves p skaičių, kurie pažymėti atitinkamais kintamaisiais su indeksais. Į antrą operatorių — išvedimo operatorių — įeina du identifikatoriai, kurių reikšmės bus išvestos. Identifikatorius p reiškia paprastąjį kintamąjį, todėl bus išvestas vienas skaičius — p reikšmė. Identifikatorius a reiškia masyvą, todėl bus išvesta grupė skaičių, kurių kiekis nustatomas minėto masyvo aprašu, t. y. bus išvesta p skaičių.

Pabaigoje yra du simboliai **end**. Pirmas simbolis **end** yra vidinio bloko pabaiga, antras simbolis **end** yra išorinio bloko pabaiga, t. y. programos pabaiga.

Iš pavyzdžių matėme, kad ALGOLo programa užrašoma kaip simbolių seka, kuri kartais netelpa vienoje eilutėje. ALGOLo programos tekstą galima perkelti į kitą eilutę be jokių kėlimo ženklų; nutraukti eilutę galima bet kuriuo simboliu, bet vaizdumo sumetimais užrašas skaidomas tam tikromis prasminėmis dalimis.

Panagrinėsime programų su masyvais pavyzdžių.

1 uždavinys. Raskite duotojo masyvo didžiausią elementą.

Žymėjimai:

a — masyvas; t — masyvo narių skaičius; *max* — didžiausias elementas; p — ciklo parametras.

Programa

```
begin integer t, p; real max įvedimas (t);
   begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
      max : =a[1];
      for p : =2 step 1 until t do
         if a[p] >max then max : =a[p];
      išvedimas (max)
end end
```

2 uždavinys. Nurodyti duotojo masyvo didžiausio elemento numerį.

Didžiausio elemento numerį pažymėkime k.

Programa

```
begin integer t, p, k; įvedimas (t);
   begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
      k : =1;
```

```
    for p : =2 step 1 until t do
        if a[p] >a[k] then k : =p;
        išvedimas (k)
end end
```

3 uždavinys. Raskite duotojo masyvo didžiausią elementą ir nurodykite to elemento numerį.

Laikykimės žymėjimų, vartotų dviejuose ankstesniuose uždaviniuose. Matome, kad iš esmės šis uždavinys yra dviejų minėtų uždavinių junginys. Taigi mums tam tikra prasme reiks sujungti dviejų ankstesnių programų darbą.

Programa

```
begin integer t, p, k; real max; įvedimas (t);
    begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
        max : =a[1]; k : =1;
            for p : =2 step 1 until t do
                if a[p] >max then
        begin max : =a[p]; k : =p end;
    išvedimas (max, k)
end end
```

Galima pasiūlyti ir kitą programos variantą, būtent:

Programa

```
begin integer t, p, k; real max; įvedimas (t);
    begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
        k : =1;
            for p : =2 step 1 until t do
                if a [p] >a [k] then k : =p;
            max : =a [k];
išvedimas (max, k)
end end
```

Ši programa yra ekonomiškesnė už ankstesnę. Štai ankstesnėje programoje kintamasis max tiek kartų keičia savo reikšmę, kiek kartų keičiasi kintamojo k reikšmė: pirmą kartą iki ciklo operatoriaus, po to ciklo operatoriuje. Paskutinėje programoje kintamasis max įgyja didžiausio elemento reikšmę po ciklo operatoriaus, t. y. vieną kartą (ir daugiau jos nekeičia).

Programavimas ALGOLu

Euklido algoritmas. Euklido algoritmas yra labiausiai paplitęs bendrojo didžiausio daliklio apskaičiavimo metodas. Šio algoritmo esmė tokia. Tarkime, duoti du sveikieji skaičiai a ir b ir $a>b\geqslant 0$.

Jeigu $b=0$, tai BDD yra skaičius a.

Jeigu $b\neq 0$, tai skaičius a dalijasi iš b su liekana, **t. y. išreiškiamas** suma: $a=bp+t$, kurios p, t — sveikieji, $0\leqslant t<b$.

Jeigu $t=0$, tai *BDD* yra skaičius b.

Jeigu $t \neq 0$, tai skaičius b dalijamas iš t su liekana, gaunama nauja liekana ir t. t., kol gaunama liekana 0.

Taigi duotosios skaičių poros *BDD* ieškojimas pakeičiamas kitos skaičių poros (dalmens ir liekanos, gautų dalijant ankstesnės poros pirmą skaičių iš antrojo) *BDD* ieškojimu.

Sudarysime programą, realizuojančią Euklido algoritmą. Vartosime žymėjimus:

a ir b — pradiniai skaičiai, ir $a > b \geqslant 0$,
BDD — ieškomasis bendrasis didžiausias skaičių a ir b daliklis,
DALMUO — dalmuo, gaunamas dalijant skaičių a ir b su liekana,
LIEKANA — liekana, gaunama dalijant a iš b.

Tada algoritmą galima pavaizduoti taip:

1. Jeigu $b=0$, tai *BDD* lygus a ir skaičiavimus užbaigti.
2. Jeigu $b \neq 0$, tai rasti a dalijimo iš b dalmenį ir liekaną, t. y. rasti *DALMUO* ir *LIEKANA*.
3. $a := b$; $b :=$ *LIEKANA* ir pereiti prie 1 punkto.

P r o g r a m a

```
 1.  begin integer a, b, BDD, DALMUO, LIEKANA;
 2.      įvedimas (a, b);
 3.      M: if b=0 then BDD : =a else
 4.           begin DALMUO : =a÷b;
 5.                 LIEKANA : =a−b×DALMUO;
 6.                 a : =b;
 7.                 b : =LIEKANA;
 8.                 goto M
 9.           end;
10.      išvedimas (BDD)
11.  end
```

Šioje programoje sąlyginis operatorius pažymėtas žymeniu M. Sąlyginis operatorius prasideda 3 eilute ir baigiasi 9 eilute. Jeigu $b=0$, tai $BDD := a$, sąlyginio operatoriaus darbas baigsis ir dirbs išvedimo operatorius programos pabaigoje. Jeigu $b \neq 0$, tai bus atliekamas po **else** einantis sudėtinis operatorius (4—9 eilutės), kuriame yra penki operatoriai: a dalijimo iš b dalmens ir liekanos apskaičiavimas, daliklio ir liekanos reikšmių pasiuntimas atitinkamai į a ir b, perėjimas prie operatoriaus su žymeniu M.

Sąlyginiame operatoriuje yra operatorius **goto** M, kuris reiškia išėjimą iš sąlyginio operatoriaus ir šuolį į operatorių su žymeniu M, t. y. vėl į kalbamo sąlyginio operatoriaus pradžią. Kadangi Euklido algoritme kiekviena tolesnė liekana griežtai mažesnė už ankstesnę, tai tam tikru momentu b pasidarys lygiu nuliui ir bus išeita iš sąlyginio operatoriaus prie einančio po jo išvedimo operatoriaus.

U ž d a v i n y s. Patikrinkite, ar turimas sveikasis skaičius a yra pirminis.

Čia reikia patikrinti, ar a neturi daliklių, nelygių 1 ir a. Be to, užtenka tikrinti daliklius nuo skaičiaus 2 iki skaičiaus $sqrt(a+1)$. Čia šaknis traukiama ne iš a, o iš skaičiaus $a+1$ dėl kvadratinės šaknies funkcijos rezultato apytiksliškumo,— kad nepraleistume daliklio, kurio kvadratas lygus a.

Žymėsime: n — duotasis skaičius; p — požymis; $p=1$, kai a — pirminis, ir $p=0$, kai a — sudėtinis; t — kintamoji daliklio reikšmė, ciklo parametras.

Programa

```
1. begin integer a, p, t, c;
2. įvedimas (a);
3. p : =1;
4. for t : =2 step 1 until sqrt(a+1) do
             begin c : =a÷t;
5.              if a=c×t then
6.                  begin p : =0; goto išėjimas end end;
7. išėjimas: išvedimas (p);
8. end
```

Programos veikia taip. Pradedame nuo $p=1$, laikydami a pirminiu (3 eilutė). Ciklo operatoriuje (4—6 eilutė) tikrinami dalikliai 2, 3, ... iki sveikojo skaičiaus, ne didesnio už $\sqrt{a+1}$. Jeigu tarp tų skaičių nėra skaičiaus a daliklių, tai po ciklo operatoriaus darbo p liks lygus 1. Jeigu toks daliklis t atsiras, tai 6 eilutėje sudėtiniame operatoriuje p įgis reikšmę 0, po to bus išeita iš operatoriaus — bus pereita prie žymens „išėjimas" nebe ciklo operatoriuje (7 eilutė).

Uždavinys. Sudarykite ir išspausdinkite keturženklius numerius (nuo 0000 iki 9999), kurių dviejų pirmųjų skaitmenų suma lygi dviejų paskutiniųjų sumai.

Sudarykime programą, žymėdami taip:

m — kintamasis numeris;

$s1$, $s2$, $s3$, $s4$ — keturženklio numerio skaitmenys, ciklo parametrai.

Programa

```
 1. begin integer m, s1, s2, s3, s4;
 2.     for s1=0 step 1 1until 9 do
 3.         for s2 : =0 step 1 until 9 do
 4.             for s3 : =0 step 1 until 9 do
 5.                 for s4 : =0 step 1 until 9 do
 6.                     if s1+s2=s3+s4 then
 7.                         begin m : =s1×10↑3+s2×10↑2
                                +s3×10+s4;
 8.                             išvedimas (m)
 9.                         end
10. end
```

Paaiškinsime ciklo operatoriaus struktūrą. Ciklo operatorius užima 2—9 eilutę. Cikle pagal parametrą $s1$ atliekamas ciklo

operatorius — 3—9 eilutė. Cikle pagal parametrą $s2$ atliekamas ciklo operatorius — 4—9 eilutė. Cikle pagal parametrą $s3$ atliekamas ciklo operatorius — 5—9 eilutė. Cikle pagal parametrą $s4$ atliekamas sąlyginis operatorius — 6—9 eilutė. Šis sąlyginis operatorius bus atliktas 10 000 kartų.

Sąlyginiame operatoriuje tikrinama, ar dviejų kairiųjų skaitmenų suma lygi dviejų dešiniųjų skaitmenų sumai — 6 eilutė.

Jeigu skaitmenų sumos sutampa, tai veikia sudėtinis operatorius, einantis po simbolio **then** ir užrašytas 7—9 eilutėje. Šiame operatoriuje iš išrinktų skaitmenų formuojamas ieškomasis numeris ir tas numeris spausdinamas.

Jeigu skaitmenų sumos nesutampa, tai sąlyginis operatorius jokių veiksmų neatlieka. Taigi jo darbas šiuo atveju yra tik sąlygos patikrinimas. Toliau bus tęsiamas ciklo operatoriaus darbas — renkama atitinkamo ciklo parametro nauja reikšmė.

Atspausdinti bus numeriai, užrašyti skaičiais 0, 101, 110, 202, 211; 220, . . . , 9 889, 9 898, 9 999.

Atkreipsime dėmesį į šios programos struktūrą.

Programa apiforminta kaip blokas (1—10 eilutė). Tą bloką sudaro vienas aprašas (1 eilutė) ir vienas ciklo operatorius (2—9 eilutė). Šį ciklo operatorių sudaro keli ciklo operatoriai, įdėti vienas į kitą. Pačiame vidiniame, „giliausiame“ ciklo operatoriuje yra trumposios formos sąlyginis operatorius, kuriame yra sudėtinis operatorius, sudarytas iš priskyrimo operatoriaus ir išvedimo operatoriaus. Taigi programos struktūra palyginti sudėtinga.

Laiptine užrašymo forma galima vaizdžiau pateikti programos struktūrą. Dažniausiai tam tikra sudėtinė kokio nors operatoriaus dalis rašoma tolesnėje eilutėje, pasistumiant į dešinę nuo to operatoriaus pradžios. Pavyzdžiui, priskyrimo operatorius ir išvedimo operatorius pasislinkę į dešinę sudėtinio operatoriaus pradžios atžvilgiu. Sudėtinis operatorius yra dešiniau negu sąlyginio operatoriaus pradžia ir t. t. Ryškiausiai matyti pakopos ciklo operatoriuose, įeinančiuose vienas į kitą.

Daugianario reikšmės skaičiavimas. Uždavinys. Apskaičiuokite daugianario

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

reikšmę, atitinkančią konkrečią x reikšmę.

Sudarinėdami programą daugianario reikšmei apskaičiuoti, žymėsime:

a — koeficientų masyvas;
x — kintamasis;
n — daugianario laipsnis;
y — ieškomoji daugianario reikšmė;
i — ciklo parametras.

P r o g r a m a

```
1. begin real x, y; integer n, i; įvedimas (n, x);
2. begin real array a[10 : n]; įvedimas (a);
3.     y : =0;
4.   for i : =0 step 1 until n do
5.          y : =y+a[i]×x↑i;
6.      išvedimas (y, x);
7. end end
```

Šioje programoje kiekvienai i reikšmei apskaičiuojamas eilinis dėmuo ir pridedamas prie sumos. Cikle apskaičiuojami visi dėmenys. Jeigu 3 eilutėje parašytume operatorių $y := a[0]$, tai ciklo operatoriuje parametrą galima keisti ne nuo 0, o nuo 1, t. y. cikle pradėti skaičiuoti nuo dėmens a_1x. Tačiau tokia programa nebus racionali, nes su kiekviena i reikšme apskaičiuojamas laipsnis x^i, t. y. atsiranda nereikalingo skaičiavimo.

Galima sudaryti ekonomiškesnę programą, kurioje, skaičiuojant laipsnį x^{k+1}, vartojamas anksčiau apskaičiuotas laipsnis x^k. Laipsnio x^k reikšmei saugoti reikia turėti dar vieną kintamąjį — pažymėkime jį t. Iš pradžių jam suteikiama reikšmė 1.

P r o g r a m a

```
1. begin real x, y, t; integer n, i; įvedimas (n, x);
3.    begin real array a[0; n]; įvedimas (a);
2.    begin real array a[0 : n]; įvedimas (a);
4. y : =a[0]; t : =1;
         for i : =1 step 1 until n do
5. begin t : =t×x; y : =y+a[i]×t end;
6.       išvedimas (y, x);
7. end end
```

Ši programa mažiau vaizdi negu ankstesnė, užtat ekonomiškesnė.

Išnagrinėkime dar vieną daugianario reikšmės apskaičiavimo variantą, kuriame taikoma Hornerio schema. Daugianarį užrašykime taip:

$$(\ldots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots+a_1)x+a_0.$$

Čia skaičiuojama, pradedant vyriausiuoju koeficientu. Tas koeficientas a_n įrašomas į rezultatą. Cikle ankstesnysis rezultatas dauginamas iš x ir pridedamas tolesnis koeficientas. Šiuo atveju nereikia kintamojo x laipsniui kaupti. Sudarysime programą daugianario reikšmei apskaičiuoti pagal Hornerio schemą.

P r o g r a m a

```
1. begin real x, y; integer n, i; įvedimas (n, x);
2. begin real array a[0 : n]; įvedimas (a);
3.       y : =a[n];
4.    for i : =n−1 step −1 until 0 do
5.          y : =y×x+a[i];
6.       išvedimas (y, x);
7. end end
```

Šioje programoje ciklo parametras kinta žingsniu — 1 nuo $n-1$ iki 0. Sakykime n reikšmė konkreti, $n=3$, ir stebėkime programos darbą.

Įvedus n, nustatomas koeficientų masyvo ilgis ir įvedamos koeficientų $a[0]$, $a[1]$, $a[2]$, $a[3]$ reikšmės.

3 eilutėje rezultatui y, priskiriama pradinė reikšmė $y:=a[3]$. Paskui pradeda veikti ciklo operatorius (4—5 eilutė). Ciklo parametras i įgyja reikšmes 2, 1, 0. Pažiūrėkime, kaip sudaromas rezultatas ciklo operatoriuje.

$i=2 \quad y=a[3]\times x+a[2]$

$i=1 \quad y=(a[3]\times x+a[2])\times x+a[1]$

$i=0 \quad y=((a[3]\times x+a[2])\times x+a[1])\times x+a[0]$

Taigi apskaičiuojama daugianario

$$y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

reikšmė.

Iš čia pateiktų trijų programų paskutinioji yra ekonomiškesnė už pirmąsias dvi tiek skaičiavimo ekonomijos prasme, tiek joje vartojamų kintamųjų prasme.

Išskirsime atskirus atvejus. Jeigu $n=0$, tai $y=a_0$, masyvą a sudaro vienas elementas, x nevartojamas, ciklas dirba tuščiai. Jeigu $n=1$, tai $y=a_1x+a_0$. Jeigu $n=2$, tai apskaičiuojama kvadratinio trinario reikšmė.

Uždavinys. Apskaičiuokite daugianario reikšmes, kurios atitinka turimas x reikšmes.

Paliksime ankstesnius žymėjimus, tik vietoj paprastojo kintamojo y vartosime rezultatų masyvą, kurį žymėsime y, o vietoj kintamojo x — atitinkamą masyvą x. Atsiras dar vienas kintamasis, nurodantis masyvų x ir y elementų kiekį; jį žymėsime p.

Apskaičiuodami kelias daugianario reikšmes, taikysime vienos reikšmės apskaičiavimo algoritmą, pateiktą ankstesnėje programoje. Dėl to sudarysime išorinį ciklą su parametru k, įgyjančiu reikšmes nuo 1 iki p su žingsniu 1. Programa bus tokia:

Programa

```
1. begin integer n, p, i, k; įvedimas (n, p);
2. begin real array a[0 : n], x, y[1 : p]; įvedimas (a, x);
3.       for: k : =1 step 1 until p do
4.          begin y[k] : =a[n];
5.             for i : =n−1 step −1 until 0 do
6.                y[k] : =y[k]×x[k]+a[i]
7.          end;
8.       išvedimas (y, x);
9. end end
```

Šioje programoje viena daugianario reikšmė su fiksuota x reikšme apskaičiuojama sudėtiniu operatoriumi (4—7 eilutė). Ciklo operatorius (3—7 eilutė) apskaičiuoja daugianario reikšmes

su visomis x reikšmėmis. Po ciklo operatoriaus darbo išvedami daugianario reikšmių masyvas ir x reikšmių masyvas.

Kvadratinės šaknies iš skaičiaus apytikslis skaičiavimas.

Uždavinys. Raskite kvadratinės šaknies iš teigiamo skaičiaus apytikslę reikšmę nuosekliųjų artinių metodu.

Funkcijai $y=\sqrt{x}$ apskaičiuoti ALGOLe yra standartinė funkcija, t. y. galima rašyti $y=sqrt(x)$. Toks užrašymas reiškia kreipimąsi į specialią programą kvadratinei šakniai apskaičiuoti kokiu nors artutiniu metodu. Vienas iš tokių metodų yra nuosekliųjų artinių metodas, kuris remiasi šiuo rekurentiniu sąryšiu:

$$y_n=\frac{1}{2}\left(y_{n-1}+\frac{x}{y_{n-1}}\right),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

y_1 — pirmasis šaknies artinys.

Iš šio sąryšio gauname seką

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,$$

reikšmių, vis mažiau nukrypusių nuo šaknies ieškomosios reikšmės. Skaičiavimai baigiami, kai tenkinama sąlyga

$$|y_n-y_{n-1}|\leqslant\varepsilon.$$

Šaknies apytiksle reikšme pasirenkama y_n. Programoje vartosime šiuos žymėjimus:

x — skaičius, iš kurio traukiama šaknis;

e — skaičiavimo tikslumas;

ys — pradinis artinys, po to *ys* reikš ankstesnę šaknies reikšmę, pereinant prie tolesnės („*y* senoji“);

yn — šaknies reikšmė, apskaičiuota pagal formulę (tolesnė reikšmė), vėliau reiškia rezultatą („*y* naujoji“).

Programa

1. **begin** **real** *x*, *ys*, *yn*, *e*;
2. *įvedimas* (*x*, *ys*, *e*);
3. *kartojimas* : *yn* : = (*ys*+*x*/*ys*)/2;
4. **if** *abs*(*yn*−*ys*)⩽*e* **then** **goto** *išėjimas*;
5. *ys* : =*yn*;
6. **goto** *kartojimas*;
7. *išėjimas* : *išvedimas* (*x*, *yn*)
8. **end**

3 eilutėje apskaičiuojama tolesnė šaknies reikšmė pagal ankstesnę reikšmę, t. y. apskaičiuojama reikšmė *yn* pagal reikšmę *ys*. 4 eilutėje tikrinamas tikslumas ir išeinama, jeigu apskaičiuota pakankamai tiksliai — pereinama į operatorių su žymeniu „*išėjimas*“, t. y. į reikšmių *x* ir *yn* išvedimo operatorių programos pabaigoje. Jeigu apskaičiuota nepakankamai tiksliai, tai ką tik apskaičiuotoji *yn* reikšmė pasiunčiama į kintamąjį *ys*, t. y. vėl laikoma pradine. Valdymas perduodamas operatoriui su žymeniu „kartojimas“, t. y. skaičiuojama toliau (3 eilutė).

Kartais išvedama visa artinių seka, kad būtų aišku, kaip gerai vyksta šaknies skaičiavimo procesas. Šiam tikslui buvo galima įtraukti *ys* reikšmės išvedimo operatorių, pavyzdžiui, 5 eilutės gale. Taip pat galima turėti kartojimų skaičiaus skaitiklį ir pabaigoje kartu su rezultatu išvesti to skaitiklio reikšmę, t. y. artinių skaičių.

Vienmačiai masyvai. 1 uždavinys. Turimo masyvo skaičius išdėstykite atvirkštine tvarka.

Vartosime šiuos žymėjimus:

a — masyvas;
t — jo elementų skaičius;
p — ciklo parametras;
b — pagalbinis kintamasis.

Programa

```
1. begin integer t, p; real b; įvedimas (t);
2. begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
3.    for p : =1 step 1 until t/2 do
4.       begin b : =a[p]; a[p] : =a[t−p+1];
                  a[t−p+1] : =b end;
5. išvedimas (a);
6. end end
```

Pagal šitą programą pirmas elementas keičiasi vietomis su paskutiniu, antras — su priešpaskutiniu ir t. t. iki vidurio. Jeigu masyvą sudaro nelyginis elementų skaičius, tai vidurinis vietos nekeičia. Indeksas $t-p+1$ su $p=1, 2, \ldots$ formuoja atitinkamų elementų numerius nuo galo, t. y. numerius t, $t-1, \ldots$.

2 uždavinys. Patikrinkite, ar masyvas sutvarkytas pagal didėjimą.

Remsimės ankstesnės programos žymėjimais, o kintamąjį *b* vartosime kaip požymį: $b=0$, jeigu masyvas sutvarkytas, ir $b=1$, jeigu masyvas nesutvarkytas.

Programa

```
1. begin integer t, p, b; įvedimas (t);
2. begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
3.       b : =0;
4.    for p : =1 step 1 until t−1 do
5.       if a[p]>a[p+1] then
6.          begin b : =1; goto M end;
7. M : išvedimas (b);
8. end end
```

3 uždavinys. Masyvo elementus, esančius nelyginėse vietose, sukeiskite vietomis su elementais, esančiais lyginėse vietose.

Programa

```
1.  begin integer t, p; real b; įvedimas (t);
2.  begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
```

```
    for p : =1 step 2 until t do
        begin b : =a[p]; a[p] : =a[p+1]; a[p+1] : =b end;
    išvedimas (a);
    end end
```

Šioje programoje t laikomas lyginiu, o ciklo parametras p įgyja nelygines reikšmes 1, 3, ... , $t-1$.

4 u ž d a v i n y s. Rasti sumą elementų, esančių masyvo lyginėse vietose.

Ieškomąją sumą pažymėsime kintamuoju b.

P r o g r a m a

```
begin integer t, p; real b; įvedimas (t);
begin real array a[1 : t]; įvedimas (a);
    b : =0;
for p : =2 step 2 until t do
b : =b+a[p];
išvedimas (b);
end end
```

Šioje programoje nesvarbu, ar dydis t lyginis. Jeigu t lyginis, tai p įgyja reikšmes 2, 4, 6, ... , t. Jeigu t nelyginis, tai p įgyja reikšmes 2, 4, 6, ... , $t-1$. Tiek vienu, tiek kitu atveju sumuojami elementai, esantys lyginėse masyvo vietose.

5 u ž d a v i n y s. Masyvo a elementus (kurių yra lyginis skaičius) surašykite į du masyvus b ir c: į masyvą b surašykite elementus, esančius nelyginėse masyvo a vietose, o į masyvą c — elementus, esančius lyginėse masyvo a vietose.

Masyvų b ir c ilgį pažymėkime t, tada masyvo a ilgis $2t$.

P r o g r a m a

```
begin integer t, p; įvedimas (t);
begin real array b, c[1 : t], a[1 : 2×t]; įvedimas (a);
    for p : =1 step 1 until t do
    begin b[p] : =a[2×p-1]; c[p] : =a[2×p] end;
    išvedimas (b, c);
end end
```

6 u ž d a v i n y s. Turinčių po t elementų masyvus b ir c taip sujunkite į masyvą a, kad masyve a nelyginėse vietose būtų masyvo b elementai, o lyginėse vietose — masyvo c elementai.

Šis uždavinys yra atvirkštinis 5 uždaviniui, kuriame reikėjo vieną masyvą a suskaidyti į du masyvus b ir c. Vartosime tuos pačius žymėjimus.

P r o g r a m a

```
begin integer t, p; įvedimas (t);
    begin real array b, c, [1 : t], a [1 : 2×t]; įvedimas (a);
        for p : =1 step 1 until t do
        begin a[2×p-1] : =b[p]; a[2×p] : =c[p] end;
        išvedimas (a);
end end
```

Dvimačiai masyvai. Nagrinėdami, pavyzdžiui, trijų lygčių sistemą su trimis kintamaisiais, galime lygčių koeficientus žymėti įvairiomis raidėmis. Tai ne visada patogu, ypač nagrinėjant sistemas su dideliu lygčių skaičiumi. Dažniausiai lygčių sistemos koeficientai žymimi viena raide su dviem indeksais. Pirmas indeksas — lygties numeris, antras — lygties kintamojo numeris. Sakykime, duota lygčių sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Šios sistemos koeficientai sudaro baigtinę skaičių seką: a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, ... , a_{33}. ALGOLe tokios sekos pateikiamos dvimačiais masyvais. Tų masyvų kintamieji įgyja du indeksus, rašomus laužtiniuose skliaustuose po masyvo žymėjimo. Dvimačius masyvus patogu vaizduoti matricomis

$$\begin{pmatrix} a[1, 1] & a[1, 2] & a[1, 3] \\ a[2, 1] & a[2, 2] & a[2, 3] \\ a[3, 1] & a[3, 2] & a[3, 3] \end{pmatrix}$$

Šiuo atveju matrica turi 3 eilutes ir 3 stulpelius. Pirmas kintamojo indeksas atitinka matricos eilutės numerį, o antras indeksas — matricos stulpelio numerį.

Kintamieji su dviem indeksais, t. y. dvimačiai masyvai, pasitaiko labai dažnai. Pavyzdžiui, galima kalbėti apie taškų su dviem koordinatėmis masyvą, šachmatų lentos laukelių masyvą ir t. t.

Dvimačiai masyvai aprašomi taip pat, kaip ir vienmačiai, tik laužtiniuose skliaustuose vietoj vienos poros skaičių, nurodančių indekso kitimo ribas, rašomos dvi poros skaičių, nurodančių atitinkamai pirmo ir antro indekso ribas. Aprašų pavyzdžiai:

1. **real array** *a* [1 : 3, 1 : 3]
2. **real array** *a* [1 : 3, 1: 3], *b* [1 : 3]
3. **integer array** *A* [1 : 8, 1 : 8]
4. **real array** *d* [1 : *t*, 1 : *t*]
5. **real array** *e* [1 : *t*, 1 : *p*]
6. **real array** *f* [1 : *a*+*b*, 1 : *x*−*y*]

1 — realiųjų skaičių masyvo iš 9 skaičių (matricos, turinčios 3 eilutes ir 3 stulpelius) aprašas.

2 — dvimačio masyvo *a* ir vienmačio masyvo *b* aprašas.

3 — sveikųjų skaičių masyvo *A* (matricos iš aštuonių eilučių ir aštuonių stulpelių) aprašas.

4 — masyvo *d* (matricos iš *t* eilučių ir *t* stulpelių) aprašas.

5 — masyvo *e* (stačiakampės matricos iš *t* eilučių ir *p* stulpelių) aprašas.

6 — masyvo *f*, kuriame yra *a*+*b* eilučių ir *x*−*y* stulpelių, aprašas.

Įvedimo ar išvedimo operatoriuje nurodytas dvimačio masyvo identifikatorius reiškia dvimačio masyvo skaičių įvedimą ar išvedimą. Užrašant dvimatį masyvą, skaičiai rašomi eilutė po eilutės. Jeigu masyvas turi t eilučių ir p stulpelių, tai pirmieji p elementų yra pirmoji eilutė, sekantys p elementų — antroji eilutė ir t. t.; iš viso bus t eilučių po p elementų.

1 uždavinys. Apskaičiuokite trečios eilės kvadratinės matricos elementų sumą.

Matricos elementų masyvą žymėkime raide a, sumą — raide s, kintamą eilutės numerį — i, kintamą stulpelio numerį — j, (i, j — ciklų parametrai).

Programa

```
1. begin integer i, j; real s;
2.    real array a[1 : 3, 1 : 3]; įvedimas (a); s : =0;
3.       for i : =1 step 1 until 3 do
4.          for j : =1 step 1 until 3 do
5.          s : =s+a[i, j];
6.    išvedimas (s)
7. end
```

Šios programos ciklo operatoriuje (3—5 eilutė) sumuojami visi matricos elementai. Išorinis ciklas fiksuoja parametro i reikšmę, kuri atitinka matricos eilutės numerį; su kiekviena tokia reikšme atliekamas vidinis ciklas pagal parametrą j; šitame vidiniame cikle susumuojami visi nagrinėjamos eilutės elementai.

Pavyzdžiui, kai $i=1$ ir $j=1$, 2, 3, bus rasta matricos pirmosios eilutės elementų suma. Kai $i=2$ ir $j=1$, 2, 3, ta suma bus papildyta antrosios eilutės elementų suma. Kai $i=3$ ir $j=1$, 2, 3, bus susumuoti ir matricos paskutinės eilutės elementai.

Masyvo a apraše nurodytos dviejų indeksų kitimo ribos: pirmas kinta nuo 1 iki 3, antras — nuo 1 iki 3. Masyvo a įvedimo operatoriumi ir bus įvesti visi devyni masyvo a skaičiai, sudarantys 3 eilučių ir 3 stulpelių matricą.

2 uždavinys. Apskaičiuokite sudarytos iš t eilučių ir p stulpelių matricos a eilučių sumas. Rezultatą išveskite kaip vienmatį masyvą s, sudarytą iš t elementų.

Programa

```
begin integer i, j, t, p;
   įvedimas (t, p);
   begin real array a[1 : t, 1 : p], s[1 : t];
      įvedimas (a);
      for t : =1 step 1 until t do
         begin s[i] : =0;
            for j : =1 step 1 until p do
               s[i] : =s[i] +a[i, j];
         end
   išvedimas (s)
end end
```

Ciklo su parametru i operatorius surašytas 5—9 eilutėje. Kiekvienai i reikšmei, t. y. kiekvienai eilutei, atliekamas sudėtinis operatorius (6—9 eilutė). Sudėtiniame operatoriuje atitinkamos eilutės sumai iš pradžių pasirenkama reikšmė 0. Po to ciklo su parametru j operatoriumi sumuojami i-tosios eilutės elementai.

Išoriniam ciklui baigus darbą, bus apskaičiuotos visų matricos t eilučių sumos, t. y. bus gautas rezultatas — masyvas a.

Jeigu nagrinėtume kvadratinę matricą iš t eilučių ir t stulpelių, uždavinys būtų paprastesnis. Programoje būtų galima apsieiti be kintamojo p, o masyvų apraše ir ciklo operatoriuose vietoj p vartoti t reikšmę.

Pratimai

1. Sąlyginiu operatoriumi aprašykite uždavinį: išaiškinkite, ar turimas skaičius a priklauso atkarpai [1, 10]; jeigu a priklauso tai atkarpai, atspausdinamas skaičius 1; jeigu ne, atspausdinamas skaičius 0.

2. Sąlyginiu operatoriumi aprašykite funkcijos

$$y=\begin{cases} x-1, & \text{kai } x<-3, \\ x, & \text{kai } -3\leqslant x\leqslant 2, \\ x+1, & \text{kai } x>2 \end{cases}$$

reikšmės skaičiavimą.

3. Kas bus atspausdinta po programos

```
begin
    integer i, S;
    S : =0;
    i : =2;
M :S : =S+i↑2;
    i : =i+2;
    if i<10 then goto M;
    išvedimas (i, S)
end
```

darbo?

4. Sudarykite programą dviejų turimų skaičių aritmetiniam vidurkiui ir geometriniam vidurkiui apskaičiuoti.

5. Sudarykite programą aritmetinės progresijos narių sumai (parinkite reikiamus pradinius duomenis) apskaičiuoti.

6. Sudarykite programą, kuri iš trijų turimų skaičių išrenka didžiausią. Kaip pasikeičia programa, jeigu reikia išrinkti mažiausią skaičių?

7. Sudarykite programą sveikųjų skaičių nuo 11 iki 20 kubų sumai apskaičiuoti. Kaip pasikeičia programa, kai reikia rasti nelyginių skaičių nuo 11 iki 20 kubų sumą?

8. Sudarykite programą funkcijos $y=x^2$ reikšmėms apskaičiuoti, kai duota p argumento reikšmių.

9. Sudarykite programą funkcijos $y=\sqrt{x}$ reikšmėms (su x reikšmėmis nuo 1 iki 3 su žingsniu 0,01) apskaičiuoti.

10. Išnagrinėkite programą ir pasakykite, koks uždavinys pagal ją sprendžiamas:

```
begin real a, b, c, M;
įvedimas (a, b, c);
M : =a;
if b>M then M : =b;
if c>M then M : =c;
išvedimas (M, a, b, c);
end
```

11. Kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 2, užima tokią padėtį, kad įstrižainių sankirtos taškas yra koordinačių pradžioje, o kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims. Sudarykite programą, pagal kurią, žinant duotojo taško koordinates, galima nustatyti, ar tas taškas priklauso kvadratui, ar ne.

12. Sudarykite tokią programą: patikrinkite, ar skaičius p yra skaičiaus t kartotinis; kai t — skaičiaus p daliklis, sužinokite daliklio kartotinumą.

13. Sudarykite programą, pagal kurią būtų galima nustatyti, ar turimas skaičius m yra sudėtinis.

14. Sudarykite programą rasti visiems turimo skaičiaus n dalikliams, įskaitant daliklius 1 ir n.

15. Kiek skaičiaus d kartotinių yra turimame masyve? Sudarykite programą.

16. Sudarykite programą apskaičiuoti kvadratinio trinario reikšmei, kai duotos a, b, c reikšmės ir t kintamojo x reikšmių. Argumento reikšmės sudaro masyvą iš t skaičių.

17. Nustatykite kiekį masyvo skaičių, didesnių už turimą skaičių (sudarykite programą).

18. Kiek lyginių skaičių yra turimame skaičių masyve? Parašykite programą.

19. Sudarykite programą rasti didžiausiam ir mažiausiam turimo skaičių masyvo elementui.

20. Parašykite programą suskaičiuoti, kiek teigiamųjų ir kiek neigiamųjų skaičių yra turimame masyve.

BINARIEJI SĄRYŠIAI IR ATITIKTYS

Dėstant mokykloje matematiką, ne tik pateikiami konkretūs faktai (formulė kvadratinei lygčiai spręsti, sinusų sudėties teorema, Pitagoro teorema ir t. t.), bet taip pat keliamas uždavinys lavinti matematinio mąstymo įgūdžius. Būtent šie įgūdžiai yra svarbiausi abiturientų praktinėje veikloje. Norint jų įgyti, reikia žinoti pagrindines sąvokas, kuriomis remiasi visa matematika (aibė, sąryšis, atitiktis, skaičius, algebrinė operacija ir t. t.).

Su sąryšių ir atitikčių pavyzdžiais mokiniai susiduria beveik visuose mokykloje dėstomuose dalykuose — matematikoje, fizikoje, chemijoje, istorijoje, geografijoje ir t. t. Tačiau tų svarbiausių sąvokų bendrosios savybės mokyklinėse programose beveik neminimos, nors pati sąryšio sąvoka nagrinėjama VI klasėje, pradedant nagrinėti funkcijas. Fakultatyvinio kurso „Binarieji sąryšiai ir atitiktys" tikslas ir yra išdėstyti tas bendras savybes, išnagrinėti bendras sąvokas, susijusias su atitiktimis bei sąryšiais, jų atskirais atvejais ir t. t.

Didžiausias dėmesys kreipiamas į aiškinimą, kad šios sąvokos universaliai pritaikomos, stengiamasi pateikti kuo daugiau sąryšių bei atitikčių pavyzdžių iš aplinkos ir tais pavyzdžiais atskleisti jų savybes. Žinoma, svarbu nepamiršti ir jų vaidmens matematikoje. Todėl specialiai nagrinėjamos savybės tokių sąryšių, kaip tiesių lygiagretumas ir statmenumas, natūrinių skaičių dalumas, lygčių ekvivalentumas, geometrinių figūrų kongruentumas ir panašumas.

Atitiktys

1. Atitikčių pavyzdžiai. Matematikos kurse jau susidūrėte su įvairiomis aibėmis: skaitinėmis aibėmis (pavyzdžiui, natūrinių skaičių aibė N, racionaliųjų skaičių aibė Q, pirminių skaičių aibė P ir t. t.), geometrinėmis figūromis (taškų aibėmis), geometrinių figūrų aibėmis (trikampių aibe, skritulių aibe ir t. t.), algebrinių reiškinių aibe ir t. t. Aibių pavyzdžių nesunku rasti ir kituose mokykloje dėstomuose dalykuose: biologijoje — gyvųjų organizmų aibės (rūšys, šeimos, būriai, tipai ir t. t.), gramatikoje — kalbos dalių ir sakinio dalių aibės, geografijoje — žemės paviršiaus taškų aibės (lygiagretės ir dienovidiniai, izotermės, izobarės ir t. t.).

Jūs jau žinote tokias aibių operacijas, kaip sankirtos ir sąjungos sudarymas, mokate skaidyti aibes į kas du nesikertančius poaibius, taip pat taikyti tokius skaidinius objektams klasifikuoti.

Galima pastebėti įvairias aibių elementų atitiktis. Pavyzdžiui, jeigu X — skaičių aibė, o Y — daugianarių aibė, tai galima nagrinėti tokias elementų $x \in X$ ir $y \in Y$ atitiktis:

a) skaičius x yra daugianario y šaknis;

b) skaičius x — daugianario y laipsnis;

c) skaičius x — daugianario y laisvasis narys;

d) skaičius x — daugianario y šaknų suma.

Jeigu X — tiesių aibė, o Y — apskritimų aibė, tai galima nagrinėti tokias elementų $x \in X$ ir $y \in Y$ atitiktis:

a) tiesė x liečia apskritimą y;

b) tiesė x kerta apskritimą y dviejuose taškuose;

c) tiesė x eina per apskritimo y centrą.

Galima nagrinėti tokias daiktavardžių aibės X ir būdvardžių aibės Y elementų atitiktis:

a) daiktavardis x suderintas su būdvardžiu y gimine;

b) daiktavardis x suderintas su būdvardžiu y skaičiumi;

c) daiktavardis x suderintas su būdvardžiu y linksniu.

Daug atitikčių pavyzdžių galima rasti geografijoje, fizikoje, chemijoje ir kituose dalykuose. Paprastai sudaryti kokio nors reiškinio matematinį modelį pradedama nuo susijusių su tuo reiškiniu elementų aibių išskyrimo ir tų aibių elementų atitikties nurodymo. Pavyzdžiui, kuriant gamybos matematinį modelį, reikia išskirti staklių, įrankių, gaminamų detalių, technologinių operacijų aibes ir t. t. Po to nustatomos tokios atitiktys, kaip „operacija x atliekama staklėmis y“, „su ruošiniu x atliekama operacija y“ ir t. t.

Į tas atitiktis reikia atsižvelgti technologui, ruošiant detalės apdorojimo procesą. Jis turi taip pat atsižvelgti į staklių apkrovimą, su kiekviena detale atliekamų operacijų tvarką ir į daug ką kita. Tai būdavo ne itin sunku padaryti, kai technologija buvo palyginti nesudėtinga. Tačiau, plečiantis gamybai, komplikuojantis gamybos vidiniams ryšiams, darėsi vis sunkiau atsižvelgti į įvairiapusiškus operacijų, detalių, staklių ir t. t. ryšius. Iškilo uždavinys automatizuoti gamybos valdymą, taikant šiuolaikines skaičiavimo mašinas. Tačiau, kad skaičiavimo mašina galėtų atsižvelgti į visas atitiktis, reikia jas nusakyti suprantama mašinai forma. Įprastinė kalba čia netinka, ir tenka remtis tiksliai apibrėžta atitikties sąvoka.

Pratimai

1. Nurodykite jums žinomas tokių aibių elementų atitiktis:

a) žmonių aibė ir miestų aibė;

b) mokytojų aibė ir mokinių aibė;

c) trikampių aibė ir skaičių aibė;

d) trikampių aibė ir apskritimų aibė;

e) plokštumos taškų aibė ir taškų porų aibė.

2. Atitikties grafikas ir grafas. Prieš pateikdami bendrą atitikties apibrėžimą, išnagrinėkime tokį pavyzdį. Sakykime, aibę X sudaro žodžiai {žalias, gilaus, linksmam, gero}, o aibę Y — žodžiai {vandenyno, miškas, lango, švytėjimas}. Galima nagrinėti elementų $x \in X$ ir $y \in Y$ atitiktį „žodis x suderintas su žodžiu y linksniu". Nesigilindami į gramatiką, tą atitiktį apibrėšime taip: sudarysime visas poras (x, y), kuriose x — vienas iš aibės X žodžių, o y — vienas iš aibės Y žodžių, po to pabrauksime tas poras, kuriose žodžiai x ir y suderinti linksniu. Galima sudaryti iš viso 16 porų: (žalias, vandenyno) (žalias, miškas), (žalias, lango), (žalias, švytėjimas), (gilaus, vandenyno), (gilaus, miškas), (gilaus, lango), (gilaus, švytėjimas), (linksmam, vandenyno), (linksmam, miškas), (linksmam, lango), (linksmam, švytėjimas), (gero, vandenyno), (gero, miškas), (gero, lango), (gero, švytėjimas).

Taigi mums pavyko apibrėžti aibių X ir Y elementų atitiktį „suderinta linksniu", nurodžius visų porų (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, aibės poaibį {(žalias, miškas), (žalias, švytėjimas), (gilaus, vandenyno), (gilaus, lango), (gero, vandenyno), (gero, lango)}. Panašiai galima apibrėžti kiekvieną kurių nors aibių[1] X ir Y atitiktį R. Dėl to, reikia sudaryti visų galimų porų (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, aibę ir iš jos išskirti ta atitiktimi susietų elementų porų poaibį Γ.

Kaip žinia, matematikoje aibė, sudaryta iš visų porų (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, vadinama aibių X ir Y *dekartine sandauga* ir žymima $X \times Y$ (žr. p. 20). Pavyzdžiui, anksčiau išvardytos 16 porų sudaro aibių $X=${žalias, gilaus, linksmam, gero} ir $Y=${vandenyno, miškas, lango, švytėjimas} dekartinę sandaugą. Taigi aibių X ir Y atitiktis apibrėžiama, nurodant dekartinės sandaugos $X \times Y$ poaibį Γ. Tas poaibis vadinamas atitikties R grafiku. Aibė X vadinama atitikties *išeities aibe,* o aibė Y — jos *paskirties aibe.*

Gali atsitikti, kad dvi aibių X ir Y atitiktys turi tą patį grafiką. Pavyzdžiui, jeigu $X=\{20, 40, 2, 1\}$ ir $Y=\{4, 5, 10\}$, tai tų aibių atitiktys $x>y$ ir „x dalijasi iš y" turi tą patį grafiką.

$$\{(20, 4), (20, 5), (20; 10), (40, 4), (40, 5), (40, 10)\}.$$

Vienodus grafikus turi ir atitiktys „tiesė x liečia apskritimą y" ir „tiesės x atstumas nuo apskritimo y centro lygus to apskritimo spinduliui".

Aibių teorijoje dvi aibės laikomos lygiomis, kai jos sudarytos iš tų pačių elementų, ir visai nesvarbu, kaip nusakytos tos aibės. Panašiai atitikčių teorijoje dvi aibių X ir Y atitiktys laikomos sutampančiomis, jeigu jų grafikai lygūs. Taip susitarus, aibių X ir Y atitiktis yra ne kas kita kaip aibių trejetas (X, Y, Γ), kai $\Gamma \subset X \times Y$.

[1] Trumpumo dėlei toliau sakysime „aibių atitiktis", o ne **aibių elementų** atitiktis.

Jeigu aibės X ir Y baigtinės, jų dekartinę sandaugą galima vaizdžiai pateikti lentele, kurios stulpeliai „numeruojami" aibės X elementais, o eilutės — aibės Y elementais. Aibių X ir Y atitikties grafikas tada vaizduojamas lentelės užbrūkšniuotų langelių visuma.

Pavyzdžiui, apibrėžkime lentele atitiktį „savaitės dieną x budi mokinys y" (1 lentelė). Iš tos lentelės matyti, kad pirmadienį budi Kilna ir Riauba, o antradienį — Lukšytė ir Sabaitė.

1 lentelė

Budėjimo grafikas

	Pirm.	Antr.	Treč.	Ketv.	Penkt.	Šešt.
Kilna	▨				▨	
Lukšytė		▨				▨
Vadys			▨			
Gricius				▨		
Danys				▨		
Eivaitė			▨			
Riauba	▨					▨
Sabaitė		▨			▨	

Anksčiau pateiktas formalus atitikties kaip aibių trejeto (X, Y, Γ) apibrėžimas patogus teoriniuose tyrimuose. Tačiau praktiškai toks atitikčių nusakymas pritaikomas tik tada, kai aibės X ir Y baigtinės (ir dar turi nelabai daug elementų). O jeigu tos aibės begalinės (pavyzdžiui, kai X — tiesių aibė, o Y — apskritimų aibė), dekartinę sandaugą $X \times Y$, taip pat ir atitikties grafiką įsivaizduoti sunku, ir tenka ieškoti kitų būdų atitiktims nusakyti.

Vaizdžiai nusakant baigtinių aibių atitiktis, dar taikomi *grafai*. Šiam tikslui abiejų aibių X ir Y elementai pavaizduojami taškais ir, kai (x, y) priklauso atitikties grafikui, išvedama rodyklė iš x ir y. Pavyzdžiui, 1 paveiksle pavaizduotas aibių $X = \{20, 40, 2, 14\}$ ir $Y = \{4, 3, 10\}$ atitikties „skaičius x dalijasi iš skaičiaus y" grafas.

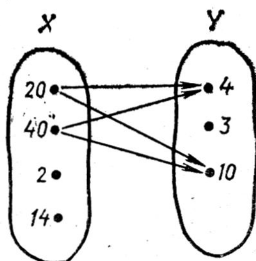
Daugelis atitikčių žymimos specialiais ženklais, parašytais tarp elementų x ir y. Pavyzdžiui, atitiktį „tiesė x lygiagreti tiesei y" žymime $x \| y$, o atitiktį „tiesė x statmena tiesei y" taip: $x \perp y$ (čia $\|$ ir $\perp$ — lygiagretumą ir statmenumą žymintys ženklai). Taip pat ženklu $\cong$ žymime figūrų kongruentumą, ženklu $>$ — atitiktį „daugiau" ir t. t. Todėl, nurodant, kad elementai x ir y susieti atitiktimi R, bendroje atitikčių teorijoje rašoma xRy.

Pratimai

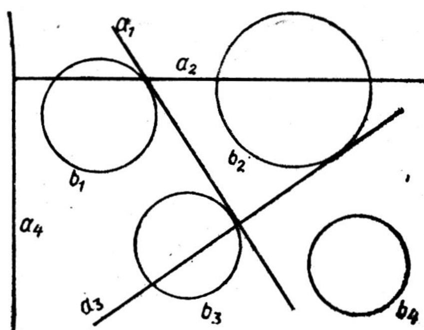
2. Nubraižykite aibių $X = \{2, 4, 6\}$ ir $Y = \{1, 3, 5\}$ atitikties „daugiau" grafą.

3. Kurie šių matematinių simbolių yra atitikčių ženklai, kurie — veiksmų ženklai?

a) $>$	e) $\leqslant$	i) $<$	m) $:$	r) $\cong$
b) $\neq$	f) $-$	j) $\subset$	n) $\times$	s) $\{\ \}$
c) $<$	g) $\|$	k) $\cap$	o) $\cup$	t) $\vdots$
d) $\perp$	h) $+$	l) $=$	p) $\in$	



1 pav.



2 pav.

4. Duotos aibės $X=\{25, 16, 7, 6\}$ ir $Y=\{5, 2, 3, 9, 0, 1\}$. Pateikite atitikties „dalijasi iš" grafiką. Nubraižykite tos atitikties grafą.

5. Sakykime, $X=\{$dėdė, tėtė, dėlė, odė$\}$ ir $Y=\{$ė, d, l, t, k, o$\}$. Parašykite atitikties „žodyje x yra raidė y" grafiką ir nubraižykite tos atitikties grafą.

6. Remdamiesi 2 paveikslu, sudarykite atitikties „tiesė liečia apskritimą" grafiką ir grafą. Remdamiesi tuo pačiu paveikslu, sudarykite atitikties „tiesė kerta apskritimą dviejuose taškuose" grafiką ir grafą.

7. 2 lentelėje nurodytas šachmatų turnyro dalyvių atitikties „laimėjo prieš" grafikas. Pagal šį grafiką surašykite turnyro rezultatų lentelę. Kas laimėjo turnyrą, kas užėmė paskutinę vietą? Sudarykite atitikties „sužaidė lygiomis su" grafiką.

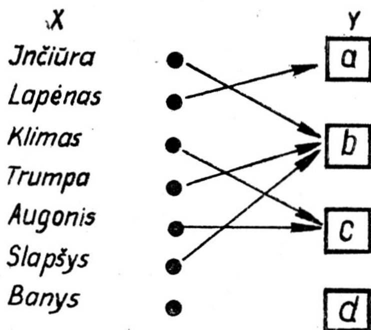
8. 3 paveiksle pavaizduotas žmonių aibės X ir namų aibės Y atitikties „gyvena name" grafas. Sudarykite tos atitikties grafiką. Kas gyvena viename name su Inčiūra?

9. Remdamiesi 4 paveikslu, sudarykite trikampių aibės X ir apskritimų aibės Y atitikties „įbrėžtas į" grafiką ir grafą. Remdamiesi tuo pačiu paveikslu, sudarykite apskritimų aibės Y ir trikampių aibės X atitikties „įbrėžtas į" grafiką ir grafą. Sudarykite apskritimų aibės ir trikampių aibės atitikties „apibrėžtas apie" grafiką ir grafą.

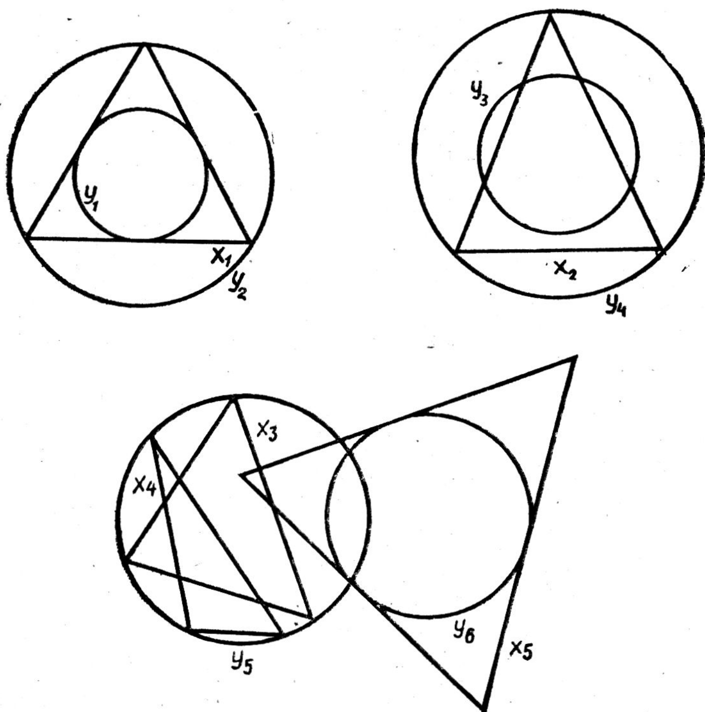
10. Remdamiesi 5 paveikslu, sudarykite atkarpų aibės X ir skaičių aibės Y atitikties „turi ilgį" (langeliais) grafiką ir grafą. Kurios atkarpos yra to paties ilgio, kaip ir atkarpa a?

2 lentelė

	1	2	3	4	5	6
1. *Kiškis*		▨			▨	
2. *Paberžis*				▨		
3. *Montrimas*	▨				▨	
4. *Augulis*			▨			
5. *Pocius*						
6. *Orentas*		▨	▨	▨	▨	



3 pav.

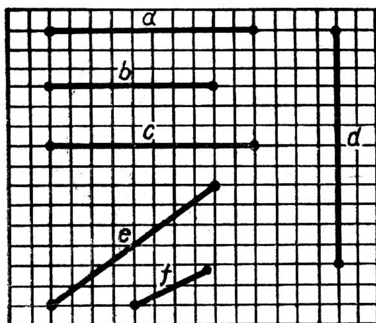


4 pav.

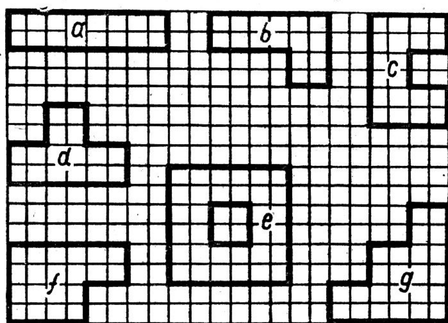
11. Remdamiesi 6 paveikslu, sudarykite geometrinių figūrų aibės ir skaičių aibės atitikties „turi plotą“ grafiką ir grafą. Kurios figūros lygiaplotės stačiakampiui *a*?

12. Lietuvių kalboje daiktavardžiai, įvardžiai, būdvardžiai ir skaitvardžiai kaitomi linksniais, skaičiais (vienaskaita ir daugiskaita) ir giminėmis (išskyrus daiktavardžius). Kartais žodžio kelių gramatinių formų parašymas sutampa. Pavyzdžiui, žodį „geras“ galima suprasti ir kaip vyriškosios giminės vienaskaitos vardininką (jis geras žmogus), ir kaip moteriškosios giminės daugiskaitos galininką (padarė geras roges). Kiekvienam šių žodžių raskite visas jį atitinkančias gramatines formas (pavyzdžiui, „maža“ $\longrightarrow$ {mot. ir niektr. gim. vienask. vard., mot. gim. vienask. įnagin. ir šauksm.} : pamokos, stale, broliai, rankove, tų, burna, žmomės, medžiagom, skrituly, maža, du, gerų, dviem, vienuolika, sūnus, avis.

3. **Skaitinės atitiktys.** Jau sakėme, kad neįmanoma lentele pavaizduoti begalinių aibių atitikčių. Dažniausiai begalinių aibių atitiktis pavyksta nusakyti kaip dviejų skaitinių aibių atitiktis ar kaip aibių, sudarytų iš skaičių rinkinių, atitiktis. Sakykime, X — plokštumos taškų aibė, o Y — apskritimų su centru taške O aibe.



5 pav.



6 pav.

Nagrinėkime atitiktį „taškas A priklauso apskritimui α“. Norint šią atitiktį nusakyti grafiku, reikėtų vaizduoti aibių X ir Y dekartinę sandaugą ir išskirti iš jos visas poras (A, α), sudarytas iš tokių taškų A ir apskritimų α, kad taškas A priklausytų apskritimui α. Tačiau tai padaryti neįmanoma. Įveskime plokštumoje koordinačių sistemą, kurios pradžia yra taškas O. Tada taškai bus nusakomi skaičių poromis (abscise ir ordinate), o apskritimai — spindulio ilgiu R. Norint sužinoti, ar taškas $A(x, y)$ priklauso apskritimui $\alpha(R)$, užtenka apskaičiuoti atstumą tarp to taško ir apskritimo centro bei patikrinti, ar jis lygus apskritimo spinduliui. Remkimės atstumo tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų formule:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Tada nagrinėjamoji atitiktis užrašoma lygybe

$$x^2+y^2=R^2,$$

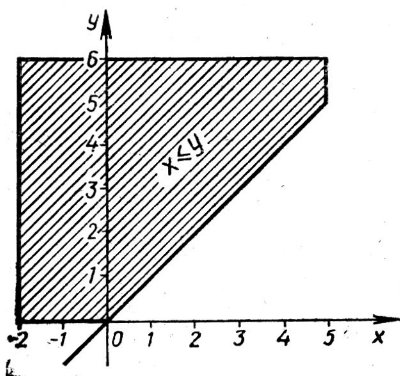
siejančia tris skaičius x, y, R.

Panašiai atitiktis „taškas A yra apskritimo α viduje“ nusakoma skaitine nelygybe $x^2+y^2<R^2$.

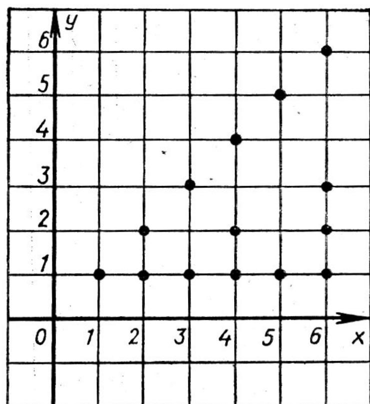
Kai atitiktis nusakoma dviejų skaičių sąryšiu, ją galima pavaizduoti koordinačių plokštumos taškų aibe, sudaryta iš tokių taškų $A(a, b)$, kad, įrašius jų koordinates į tą sąryšį, būtų gautas teisingas teiginys. Ta taškų aibė taip pat vadinama šios atitikties grafiku.

Sakykime, X ir Y — realiųjų skaičių aibės. Pavaizduokime atitikties $x=y$ taškinį grafiką. Šiam tikslui reikia pažymėti visus plokštumos taškus, kurių ordinatė lygi abscisei. Tie taškai priklauso pirmojo ir trečiojo koordinatinio kampo pusiaukampinei. O tų pačių aibių atitikties $x\leqslant y$ grafikas sudarytas iš pusiaukampinės taškų ir virš jos esančių taškų.

Aibių $X=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$ ir $Y=\{y \mid 0\leqslant y\leqslant 6\}$ atitikties $x\leqslant y$ grafikas pavaizduotas 7 paveiksle.



7 pav.



8 pav.

Aibių atitiktys koordinačių plokštumoje vaizduojamos ir tada, kai išeities ir paskirties aibės baigtinės arba begalinės, bet gali būti sunumeruotos (tokios aibės vadinamos *suskaičiuojamomis*). Tada aibių X ir Y elementai sunumeruojami:

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, \quad Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

Po to pora (x_i, y_i) vaizduojama koordinačių plokštumos tašku, kurio koordinatės yra i ir j. Užtenka pažymėti plokštumos taškus (i, j), kurių x_iRy_j, ir atitiktis bus vaizdžiai nusakyta.

Pavyzdžiui, pavaizduokime natūrinių skaičių aibės atitiktį „dalijasi iš". Dėl to užtenka pažymėti tokius taškus $A(m, n)$, kurių koordinatės m ir n — natūriniai skaičiai, o m dalijasi iš n. Šio grafiko dalis parodyta 8 paveiksle.

Pratimai

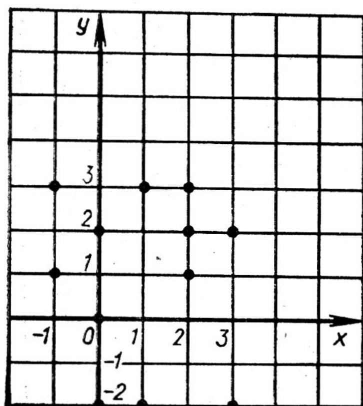
13. Nubraižykite šių atitikčių grafikus (X ir Y — realiųjų skaičių aibė):

a) $x^2+y^2\leqslant 25$; c) $x^2\leqslant y$;
b) $(x-3)^2+(y-4)^4\geqslant 25$; d) $x^2+4y=4$.

14. Nubraižykite tų pačių atitikčių grafikus, kai:
a) X — realiųjų skaičių aibė, o Y — sveikųjų skaičių aibė;
b) X ir Y — sveikųjų skaičių aibė.

15. Nubraižykite atitikties $x^2+y^2\leqslant 25$ grafiką, kai $X=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$ ir $Y=\{y \mid -4\leqslant y\leqslant 4\}$.

16. Pavaizduokite atitikties $y=x+4$ taškinį grafiką, kai $X=\{-1, 1, 3, 5\}$, $Y=\{3, 7, 8, 9, 10\}$.



9 pav.

17. 9 paveiksle pavaizduotas atitikties taškinis grafikas. Nubraižykite tos atitikties grafą.

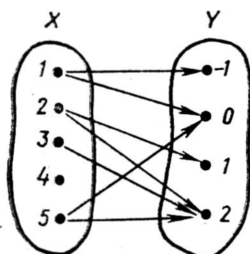
18. 10 paveiksle pavaizduotas skaitinės atitikties grafas. Nubraižykite tos atitikties grafiką.

4. Vaizdas ir pilnasis pirmvaizdis. Atitikties apibrėžimo sritis ir reikšmių aibė. Raide X pažymėkime gamykloje gaminamų detalių aibę, o Y — tos gamyklos staklių aibę. Sakykime, xRy reiškia, jog detalė x apdorojama staklėmis y[1]. Gaminamą detalę reikia apdoroti įvairiomis staklėmis. Be to, tomis pačiomis staklėmis gali būti apdorojamos skirtingos detalės. Todėl detalę a atitinka aibė $R(a)$, sudaryta iš staklių, kuriomis ji apdorota. Lygiai taip pat stakles b atitinka detalių aibė $R^{-1}(b)$, apdorotų tomis staklėmis. Aibė $R(a)$ vadinama detalės a vaizdu atitiktyje R, o aibė $R^{-1}(b)$ — staklių b pilnuoju pirmvaizdžiu toje pačioje atitiktyje.

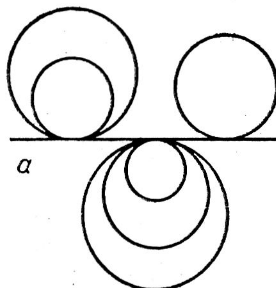
Apibrėžkime tas sąvokas bendruoju atveju. Sakykime, R — aibių X ir Y atitiktis, o a — aibės X elementas. To elemento *vaizdu* vadinsime aibę $R(a)$ visų tokių $y \in Y$, kad aRy. Elemento $b \in Y$ *pilnuoju pirmvaizdžiu* toje atitiktyje vadinsime aibę $R^{-1}(b)$ tokių elementų $x \in X$, kad xRb.

Pavyzdžiui, jeigu X — plokštumos tiesių aibė, Y — tos pačios plokštumos apskritimų aibė, o R — atitiktis „liečia", tai aibę $R(a)$ sudaro visi apskritimai, kuriuos liečia tiesė a (11 pav.), o $R^{-1}(b)$ — visos tiesės, kurios liečia apskritimą b (12 pav.).

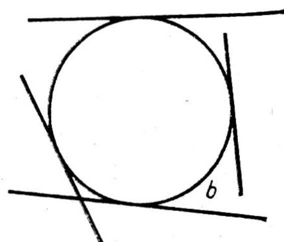
Jeigu aibės X ir Y baigtinės, o jų atitiktis R pavaizduota grafu, tai $R(a)$ sudaro visų taške a prasidedančių rodyklių galai, o $R^{-1}(b)$ — pradžios visų rodyklių, kurios baigiasi taške b.



10 pav.

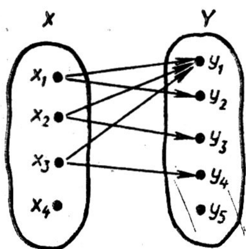


11 pav.

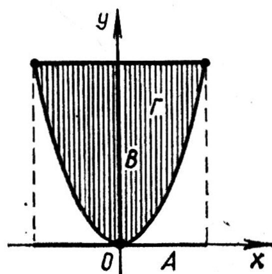


12 pav.

[1] Kartais apibrėšime ne pačią atitiktį R, o žymėjimo xRy prasmę.



13 pav.



14 pav.

Bet kurį aibės X poaibį A atitinka jo vaizdas $R(A)$ aibėje Y. Tas vaizdas yra visų elementų iš A vaizdų sąjunga, t. y.

$$R(A)=\bigcup_{a\in A} R(a).$$

Visos aibės X vaizdas šioje atitiktyje vadinamas atitikties R *reikšmių sritimi* ir žymimas $R(X)$. Jeigu atitiktis R nusakyta grafu, tai $R(X)$ sudaro visų grafo rodyklių galai.

Lygiai taip pat kiekvieną aibės Y poaibį B atitinka jo pilnasis pirmvaizdis $R^{-1}(B)$ — visų elementų iš B pirmvaizdžių sąjunga. Kitaip tariant,

$$R^{-1}(B)=\bigcup_{b\in B} R^{-1}(b).$$

Visos aibės Y pilnasis pirmvaizdis atitiktyje R vadinamas tos atitikties *apibrėžimo sritimi* ir žymimas $R^{-1}(Y)$. Jeigu atitiktis R nusakyta grafu, tai jos apibrėžimo sritis yra visų rodyklių pradžių aibė.

Pavyzdžiui, jeigu atitiktis R nusakyta 13 paveikslo grafu, tai jo apibrėžimo sritis yra aibė $A=\{x_1, x_2, x_3\}$, o reikšmių sritis — aibė $B=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Jeigu atitiktis R nusakyta koordinačių plokštumos poaibiu Γ, tai R apibrėžimo sritis yra Γ projekcija į abscisių ašį, o reikšmių sritis — Γ projekcija į ordinačių ašį (14 pav.).

Pratimai

19. Raskite skaičiaus 4 vaizdą 2 pratimo atitiktyje. Toje pačioje atitiktyje raskite skaičiaus 5 pilnąjį pirmvaizdį.

20. Raskite skaičiaus 6 vaizdą 4 pratimo atitiktyje. Toje pačioje atitiktyje raskite skaičiaus 2 pilnąjį pirmvaizdį. Kokio elemento pirmvaizdis tuščias? Kokio elemento pilnasis pirmvaizdis sutampa su visa aibe X? Raskite šios atitikties apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį.

21. 5 pratimo atitiktyje raskite žodžio „dėdė“ vaizdą ir raidės „d“ pilnąjį pirmvaizdį. Raskite raidę, kurios pirmvaizdis tuščias.

22. Nurodykite namo a iš 8 pratimo pilnąjį pirmvaizdį. Kokie elementai priklauso tam pirmvaizdžiui? Ar šioje atitiktyje yra namų, kuriuose negyvena žmonės iš aibės X? Ar šioje atitiktyje yra žmonių, kurie negyvena aibės Y namuose?

23. Sakykime, X — klasės mokinių aibė, Y — tos klasės suolų aibė. Kiekvienam mokiniui priskiriamas suolas, kuriame jis sėdi. Kas yra duotojo suolo pilnasis pirmvaizdis? Kas yra visų mokinių aibės vaizdas?

24. 7 pratimo lentelėje raskite turnyro dalyvį, kurio pirmvaizdis tuščias. Kam šis turnyro dalyvis pralaimėjo? su kuo jis sužaidė lygiomis?

25. Kas yra apskritimo pilnasis pirmvaizdis trikampių ir apskritimų atitiktyje „įbrėžtas“? Iš kelių elementų sudarytas trikampio vaizdas?

26. Duota keturkampių ir apskritimų atitiktis „įbrėžtas“. Kurių keturkampių vaizdas netuščias?

27. Trikampių aibės X ir realiųjų skaičių aibės Y atitiktyje „trikampio x perimetras lygus y“ raskite trikampių aibės vaizdą.

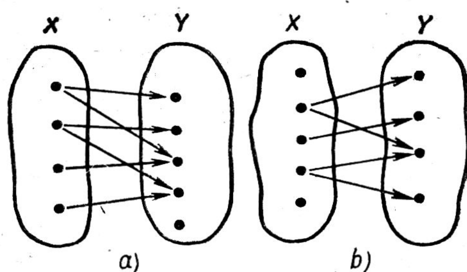
5. Atitikčių rūšys. Gali atsitikti, kad atitikties R apibrėžimo sritis sutampa su jo išeities aibe X, t. y. su kiekvienu $a \in X$ galima rasti tokį $y \in Y$, kad aRy. Tada sakoma, kad atitiktis R *visur apibrėžta*. Pavyzdžiui, atitiktis „įbrėžtas“ apibrėžta visoje trikampių aibėje — kad ir koks būtų trikampis a, galima rasti apskritimą y, į kurį jis įbrėžtas. Tačiau ta pati atitiktis „įbrėžtas“ apibrėžta ne visoje keturkampių aibėje: tik keturkampiai, kurių priešingųjų kampų didumų suma lygi 180°, įbrėžti į tam tikrą apskritimą.

Jeigu atitikties R reikšmių aibė sutampa su jo paskirties aibe, tai sakoma, kad ta atitiktis *siurjektyvi* (iš prancūziško prielinksnio „*sur*“ — „ant“). Šiuo atveju kiekvienas aibės Y elementas b yra kurio nors aibės X elemento x vaizdas. Pavyzdžiui, kai X — trikampių aibė, o Y — teigiamųjų skaičių aibė, atitiktis „trikampio x perimetras lygus y“ siurjektyvi. Iš tikrųjų, kad ir koks būtų teigiamas skaičius b, visada rasime trikampį, kurio perimetras lygus b. Tačiau ta pati atitiktis nėra siurjektyvi, kai Y — visų realiųjų skaičių aibė, nes trikampio perimetras turi būti teigiamas skaičius.

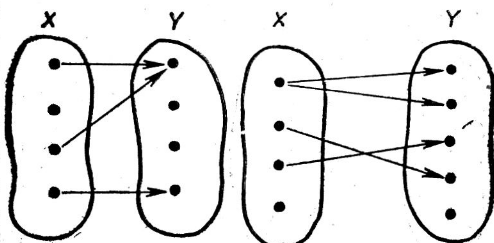
Tiesių aibės X ir apskritimų aibės Y atitiktis „liečia“ visur apibrėžta ir siurjektyvi: kiekviena tiesė liečia kurį nors apskritimą ir kiekvieną apskritimą liečia kuri nors tiesė.

Jeigu atitiktis nusakyta grafu ir visur apibrėžta, tai iš kiekvieno aibės X taško išeina nors viena rodyklė (15 pav., a). Jeigu ji siurjektyvi, tai kiekvienas aibės Y taškas yra kurios nors rodyklės galas (15 pav., b).

Atitiktis galime skirti ir pagal vaizdo ir pilnojo pirmvaizdžio elementų skaičių. Jeigu su atitiktimi R kiekvieno elemento $x \in X$ vaizdas arba tuščias, arba turi tik vieną elementą, tai R vadinama *funkcine atitiktimi*, arba *atvaizdžiu iš aibės X aibėje Y*. Kitaip tariant, atitiktis R yra funkcinė, jeigu iš xRy_1 ir xRy_2 galima padaryti išvadą: $y_1 = y_2$. Taigi funkcinės atitikties grafe nėra išsiskiriančių rodyklių; jis toks, kaip 16 paveiksle,— iš kiekvieno aibės X taško arba neišeina nė viena rodyklė, arba išeina viena rodyklė.



15 pav.

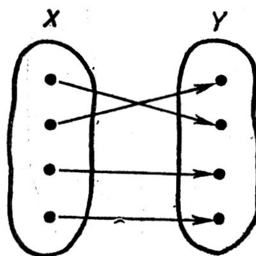


16 pav. 17 pav.

Visur apibrėžta funkcinė atitiktis vadinama *aibės X atvaizdžiu aibėje Y*. Taigi R yra aibės X atvaizdis aibėje Y, jeigu kiekvieną $x \in X$ atitinka vienas ir tik vienas toks $y \in Y$, kad xRy. Tas elementas y ir yra x vaizdas atitiktyje R, $y = R(x)$. Jeigu aibės X atvaizdis aibėje Y siurjektyvus, tai jis vadinamas aibės X atvaizdžiu į aibę Y.

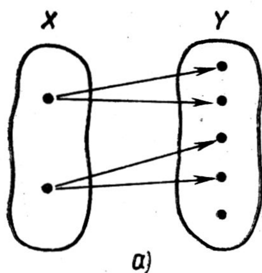
Pavyzdžiui, atitiktis, kai kiekvienam trikampiui priskiriamas apie jį apibrėžtas apskritimas, yra trikampių aibės X atvaizdis į apskritimų aibę Y. Tačiau tokia pati keturkampių aibės Z ir apskritimų aibės Y atitiktis yra tik funkcinė atitiktis, arba atvaizdis iš Z aibėje Y: juk yra keturkampių, apie kuriuos negalima apibrėžti nė vieno apskritimo, bet jeigu jau apie kurį nors keturkampį galima apibrėžti apskritimą, tai jis vienintelis. Ta atitiktis siurjektyvi.

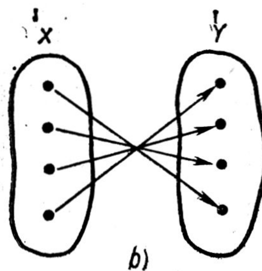
Pagaliau būna atitikčių, kai kiekvieno elemento $y \in Y$ pilnasis pirmvaizdis arba tuščias, arba turi tik vieną elementą. Kitaip tariant, tokioms atitiktims iš x_1Ry ir x_2Ry išplaukia $x_1 = x_2$. Tokios atitiktys vadinamos *injektyviomis*. Injektyviųjų atitikčių grafas negali turėti sueinančių į vieną tašką rodyklių, t. y. jis toks, kaip 17 paveiksle.

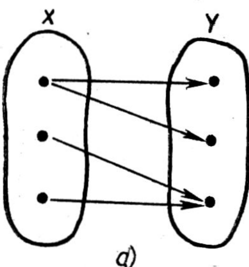


18 pav.

Pavyzdžiui, mokinių aibės X ir stalų aibės Y atitiktis „sėdi už" nėra injektyvi, nes prie to paties stalo gali sėdėti keli mokiniai. Štai atitiktis „skaičius x yra tri-







19 pav.

kampio y perimetras“ injektyvi, nes du skirtingi skaičiai negali būti to paties trikampio perimetrais. Injektyvieji atvaizdžiai vadinami *apgręžiamais*.

Atitiktis, turinti visas keturias savybes (t. y. visur apibrėžta, siurjektyvi, funkcinė ir injektyvi), vadinama *bijektyvia*. Kitaip tariant, R bijektyvi, kai ji yra toks aibės X atvaizdis aibėje Y, kad X vaizdas sutampa su Y ir jokie du aibės X elementai npereina į tą patį aibės Y elementą. Bijektyvios atitikties grafas pavaizduotas 18 paveiksle.

Pratimai

28. Nubraižykite atitikties grafą:

a) visur apibrėžtos, funkcinės ir injektyvios, bet nesiurjektyvios;

b) funkcinės, injektyvios ir siurjektyvios, bet ne visur apibrėžtos;

c) visur apibrėžtos, injektyvios ir siurjektyvios, bet nefunkcinės;

d) visur apibrėžtos, funkcinės ir siurjektyvios, bet neinjektyvios;

e) siurjektyvios ir funkcinės, bet ne visur apibrėžtos ir neinjektyvios;

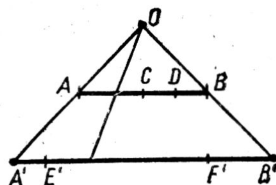
f) siurjektyvios ir injektyvios, bet ne visur apibrėžtos ir nefunkcinės.

29. 19 paveiksle pavaizduoti tam tikrų atitikčių grafai. Kurios tų atitikčių visur apibrėžtos, kurios siurjektyvios, kurios funkcinės ir kurios injektyvios? Kurios tų atitikčių bijektyvios?

30. Ar realiųjų skaičių aibės $\boldsymbol{R}$ ir neneigiamųjų skaičių aibės $\boldsymbol{R}_0$ atitiktis $y=x^2$ yra: a) visur apibrėžta; b) siurjektyvi, c) funkcinė, d) injektyvi? Ar pasižymi kuriomis nors tų savybių aibių $\boldsymbol{R}$ ir $\boldsymbol{R}$ atitiktis $y=x^2$? ta pati aibių $\boldsymbol{R}_0$ ir $\boldsymbol{R}_0$ atitiktis?

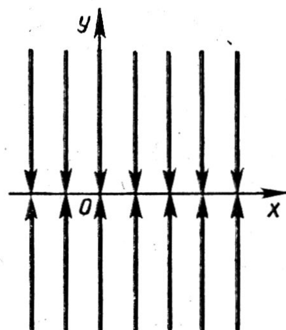
31. Kiekvienam natūriniam skaičiui x priskirkime jo liekaną y, gaunamą dalijant tą skaičių iš 3. Taip apibrėžiama aibių $\boldsymbol{N}$ ir $\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ atitiktis $\boldsymbol{R}$ („x dalybos iš 3 liekana lygi y“). Ar ši atitiktis yra $\boldsymbol{N}$ atvaizdis aibėje $\boldsymbol{N}_0$? Raskite skaičiaus 0 pilnąjį pirmvaizdį šioje atitiktyje? Ar visur ji apibrėžta? Ar ji funkcinė? Ar injektyvi ši atitiktis?

32. Sakykime, X — visų, išskyrus vienetą, natūrinių skaičių aibė. Atitiktį „dalijasi“ pažymėkime R. Ar ši atitiktis yra X atvaizdis aibėje X? Ar ji siurjektyvi? Ar ji injektyvi? Ar ji funkcinė? Ar ji visur apibrėžta? Atsakykite į tuos pačius klausimus, kai X — pirminių skaičių aibė.



20 pav.

33. Sakykime, X — vardų aibė {Andrius, Matas, Arūnas, Kostas, Vaidas, Kęstas, Virga, Saulius, Mikas, Stasys, Ona, Tadas, Jonas} ir Y — lietuviškosios abėcėlės raidžių aibė. Kiekvienam vardui priskirkime jo pirmąją raidę. Ar gautoji atitiktis yra X atvaizdis aibėje Y? Ar ji injektyvi? Ar ji siurjektyvi? Ar ji visur apibrėžta? Raskite X vaizdą ir raidės „A“ pilnąjį pirmvaizdį. Raskite prie balsių aibės pilnąjį pirmvaizdį. Kokių raidžių pilnieji pirmvaizdžiai bus tušti, net jeigu X — visų lietuviškų vardų aibė?



21 pav.

34. Duotos aibės $A=\{a, b, c\}$ ir $B=\{1, 2\}$. Nurodykite aibių $A\times B$ ir $B\times A$ bijektyvią atitiktį.

35. Aibę X sudaro visi plokštumos kvadratai, o aibę Y — visi tos pačios plokštumos apskritimai. Kiekvieną kvadratą x atitinka į jį įbrėžtas apskritimas y. Ar ši atitiktis yra X atvaizdis aibėje Y? Ar ji injektyvi? Raskite apskritimo pilnąjį pirmvaizdį? Ar bus ši atitiktis injektyvi, jeigu X pakeisime aibe Z kvadratų, kurių kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims?

36. Atkarpų AB ir $A'B'$ taškai susieti atitiktimi, nurodyta 20 paveiksle. Raskite atkarpos CD vaizdą ir atkarpos $E'F'$ pilnąjį pirmvaizdį šioje atitiktyje. Ar ji bijektyvi?

37. Raide R pažymėkime koordinačių plokštumos taškų ir abscisių ašies taškų atitiktį, kuria kiekvienam plokštumos taškui priskiriama jo projekcija į abscisių ašį (21 pav.). Ar ši atitiktis funkcinė? Ar ji visur apibrėžta? Ar ji injektyvi ir ar siurjektyvi? Ar ji bijektyvi? Nubrėžkite apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžia, o spindulys lygus 5, ir raskite jo vaizdą šioje atitiktyje. Raskite atkarpos $[-5; 5]$ pilnąjį pirmvaizdį šioje atitiktyje.

38. Sakykime, X — lietuviškosios abėcėlės balsių aibė, o Y — priebalsių aibė. Atitiktį „stovi greta prieš“ pažymėkime R. Ar ta atitiktis yra X atvaizdis aibėje Y? Ar ji visur apibrėžta? Ar ji injektyvi? Ar ji siurjektyvi? Koks yra aibės X vaizdas šioje atitiktyje? Atsakykite į tuos pačius klausimus atitikčiai „stovi greta po“.

39. Nubraižykite atvaizdžio $x \to x^2$ grafiką, jeigu X ir Y — sveikųjų skaičių aibė. Ar tas atvaizdis injektyvus? Ar jis siurjek-

tyvus? Atsakykite į tuos pačius klausimus, kai X ir Y — natūrinių skaičių aibė.

6. Atitikčių išvados. Išnagrinėkime dvi plokštumos tiesių aibės X ir tos pačios plokštumos apskritimų aibės Y atitiktis:

R : „tiesė eina per apskritimo centrą“

ir

S : „tiesė kerta apskritimą dviejuose taškuose“.

Aišku, jeigu kuri nors pora (x, y) tenkina atitiktį R (t. y. tiesė x eina per apskritimo y centrą), tai ji tenkina ir atitiktį S (t. y. tiesė x kerta apskritimą y dviejuose taškuose). Kitaip tariant, iš xRy išplaukia xSy. Taigi atitiktis S yra atitikties R išvada.

Apskritai, sakoma, kad kai aibių X ir Y atitiktis S yra tų aibių atitikties R *išvada,* kai iš xRy išplaukia xSy. Tai reiškia, jog iš $(x, y)\in\Gamma_R$ išplaukia $(x, y)\in\Gamma_S$, kai Γ_R ir Γ_S — atitikčių R ir S grafikai. Kitaip tariant, atitiktis S yra atitikties R išvada, jeigu jos grafikas apima atitikties R grafiką, $\Gamma_R\subset\Gamma_S$. Tokiu atveju rašysime: $R\subset S$.

Atitiktis, kurios grafikas tuščias, vadinama tuščiąja atitiktimi, o atitiktis, kurios grafikas yra visa dekartinė sandauga $X\times Y$, — *pilnąja atitiktimi.* Aišku, kad pilnoji atitiktis yra kiekvienos atitikties R išvada, o kiekviena atitiktis yra tuščiosios atitikties $\varnothing$ išvada. Iš tikrųjų,

$$\varnothing\subset\Gamma_R\subset X\times Y.$$

Pratimai

40. Sakykime, X — vyrų aibė, Y — visų žmonių aibė. Ar atitiktis xRy: „x yra y tėvas“ — atitikties xSy: „x yra y senelis“ išvada?

Ar su tomis pačiomis aibėmis X ir Y atitiktis „x yra y palikuonis“ — atitikties „x yra y sūnus“ išvada?

41. Kurios šių atitikčių yra kitų išvados: daugiakampiai x ir y a) kongruentūs; b) lygiapločiai; c) panašūs; d) turi vienodą perimetrą; e) turi vienodą kraštinių skaičių; f) simetriški tiesės l atžvilgiu?

42. Sakykime, X — plokštumos tiesių aibė, Y — tos pačios plokštumos apskritimų aibė. Ar atitiktis „tiesė turi bendrų taškų su apskritimu“ yra atitikties „tiesė liečia apskritimą“ išvada? Ar atitiktis „tiesė liečia apskritimą“ yra atitikties „tiesė nutolusi nuo apskritimo centro atstumu, lygiu to apskritimo spinduliui“ išvada? Ar atitiktis „tiesė kerta apskritimą“ yra atitikties „tiesės atstumas nuo apskritimo centro lygus pusei spindulio“ išvada?

43. Ar atitiktis „skaičius x dalijasi iš y“ yra atitikties „x dalijasi iš $2y$“ išvada? O ar yra atitikties „$2x$ dalijasi iš y“ išvada? Ar atitiktis „skaičius x dalijasi iš skaičiaus y“ yra atitikties „skaičiaus x skaitmenų suma dalijasi iš y“ išvada?

7. Operacijos su atitiktimis. Taikant atitiktis konkrečiuose uždaviniuose, reikia mokėti iš vienų atitikčių gauti kitas, t. y. mokėti atlikti operacijas su atitiktimis (juk ir iš skaičių nebūtų daug naudos, jeigu žmonės nemokėtų sudėti, atimti, dalyti jų ir atlikti su jais kitų operacijų). Kai kurios atitikčių operacijos atitinka jau žinomas aibių operacijas — sankirtos, sąjungos, papildinio radimą. Mat aibių X ir Y atitiktys yra apibrėžiamos jų grafikais, t. y. dekartinės sandaugos $X\times Y$ poaibiais, o su tais grafikais galima daryti įvairias operacijas.

Sakykime, X ir Y — žmonių aibės, R ir S — atitiktys „būti tėvu" ir „būti motina". Vietoj „tėvo" ir „motinos" galima būtų įvesti bendrą sąvoką „gimdytojas". Tada atsiranda nauja atitiktis „būti gimdytoju", kurią pažymėsime T. Aišku, kad x ir y gimdytojas tada ir tik tada, kai x arba y tėvas, arba y motina. Todėl atitikties T grafikas yra atitikčių R ir S grafikų sąjunga. Ją natūralu vadinti tų atitikčių sąjunga ir žymėti $R\cup S$.

Sakykime, duotos dvi aibių X ir Y atitiktys R ir S. Atitikčių sąjunga vadinama tų aibių atitiktis $R\cup S$, kurios grafikas yra atitikčių R ir S grafikų sąjunga. Simboliškai tai galima užrašyti taip:

$$\Gamma_{R\cup S}=\Gamma_R\cup\Gamma_S.$$

Jeigu atitiktys R ir S pateiktos grafais, tai gauti jų sąjungos grafą visai paprasta — tai pirmojo ir antrojo grafo rodyklės.

O dabar sakykime, kad X — žmonių aibė ir Y — kino filmų aibė. Nagrinėkime dvi tų aibių atitiktis: xRy reiškia, kad x buvo filmo y scenarijaus autorius, o xSy — kad x buvo to filmo režisierius. Kartais būna, kad režisierius suka kino filmą pagal savo scenarijų (pavyzdžiui, Lenino premijos laureatas V. Šukšinas buvo kino filmo „Putinas raudonasai" ir scenarijaus autorius, ir režisierius). Taigi galima nagrinėti naują atitiktį T — „būti filmo scenarijaus autoriumi ir režisieriumi". Čia xTy tada ir tik tada, kai ir xRy, ir xSy. Kitaip tariant, pora (x, y) priklauso atitikties T grafikui tik tada, kai ji priklauso ir atitikties R grafikui, ir atitikties S grafikui, t. y. T grafikas yra R grafiko ir S grafiko sankirta. Pačią atitiktį natūralu vadinti atitikčių R ir S sankirta ir žymėti $R\cap S$.

Sakykime, turime dvi aibių X ir Y atitiktis. Jų *sankirta* vadinama tų aibių atitiktis $R\cap S$, kurios grafikas yra atitikčių R ir S grafikų sankirta. Simboliškai tai galima užrašyti taip:

$$\Gamma R\cup S=\Gamma_R\cup\Gamma_S.$$

Jeigu atitiktys Γ_R ir Γ_S pateiktos grafais, tai jų sankirtos grafas sudaromas iš rodyklių, priklausančių abiem grafams iš karto.

Atitikčių „būti tėvu" ir „būti motina" sankirta tuščia, nes tas pats žmogus x negali vienu metu būti žmogaus y ir tėvu, ir motina. Tokias dvi atitiktis vadinsime *nesutaikomomis*. Kitaip sakant, aibių X ir Y atitiktys R ir S nesutaikomos, kai jų sankir-

ta — tuščioji atitiktis $\varnothing$. Pavyzdžiui, nesutaikomos yra atitiktys „mažiau" ir „daugiau" — jokie x ir y negali tenkinti dviejų sąlygų: $x<y$ ir $x>y$. O atitiktys „ne daugiau" ir „ne mažiau" sutaikomos: x ir y susieti abiem atitiktimis, kai $x=y$.

Kiekviena lygtis ar nelygybė su dviem kintamaisiais yra skaitinė atitiktis. Jeigu dvi tokios lygtys ar nelygybės sutaikomos, tai jos sudaro suderintą sistemą. Tos sistemos sprendiniu vadinama lygčių ir nelygybių grafikų sankirta. Jeigu jos nesutaikomos, tai ta sankirta tuščia, ir sistema neturi sprendinių (jos sprendinių aibė tuščia).

Pavyzdžiui, atitiktys $x+y=7$ ir $x^2+y^2=29$ sutaikomos, o atitiktys $x^2+y^2=3$ ir $2x^2+2y^2=10$ nesutaikomos. Tai reiškia, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$$

suderinta (turi sprendinius (2; 5) ir (5; 2)), o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases}$$

nesuderinta.

Kiekvienai atitikčiai R galima rasti jai priešingą atitiktį $\bar{R}$, t. y. tokią atitiktį, kad $x\bar{R}y$ tada ir tik tada, kai neteisinga xRy. Pavyzdžiui, tiesių ir apskritimų atitikčiai „liesti" priešinga atitiktis „neliesti", o atitikčiai „turėti tuščią sankirtą" priešinga atitiktis „turėti netuščią sankirtą".

Iš priešingųjų atitikčių apibrėžimo aišku, kad jų grafikai vienas kitą papildo iki dekartinės sandaugos $X\times Y$. Todėl jeigu $\bar{R}$ priešinga atitikčiai R, tai $\bar{R}$ savo ruožtu priešinga atitikčiai R. Bet kurios dvi priešingosios atitiktys nesutaikomos. Tačiau atvirkštinis teiginys neteisingas — yra nesutaikomų, bet ne priešingų atitikčių. Pavyzdžiui, anksčiau buvo minėta, kad atitiktys „būti tėvu" ir „būti motina" nesutaikomos. Tačiau jos nėra priešingos, nes lengva nurodyti tokią žmonių porą (x, y), kad x nėra nei y tėvas, nei y motina. O jeigu R ir $\bar{R}$ — priešingosios atitiktys, tai su bet kuriais $x\in X$ ir $y\in Y$ įvykdoma viena ir tik viena iš dviejų sąlygų: xRy, $x\bar{R}y$.

Pratimai

44. Sakykime, X — būdvardžių aibė, o Y — daiktavardžių aibė. Ar sutaikomos atitiktys „suderinta gimine" ir „nesuderinta skaičiumi"?

45. Sakykime, X — tiesių aibė, Y — apskritimų aibė. Ar sutaikomos atitiktys „liečia" ir „eina per centrą"? O atitiktys „kerta" ir „eina per centrą"?

46. Jeigu atitiktis R netuščia, o S — atitikties R išvada, tai R ir S sutaikomos. Įrodykite.

47. Raskite realiųjų skaičių aibės X ir lygčių aibės Y atitiktį, priešingą atitikčiai „yra šaknis".

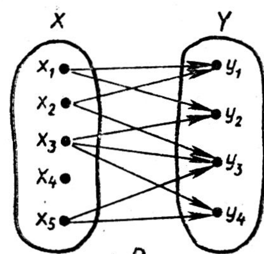
48. Ar tiesių aibės ir apskritimų aibės atitiktys „liečia" ir „kerta dviejuose taškuose" priešingos?

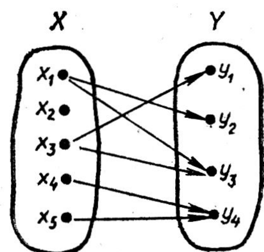
49. Ar trikampių aibės ir apskritimų aibės atitiktys „įbrėžtas" ir „apibrėžtas" priešingos? Ar jos sutaikomos?

50. Ar sutaikomos atitiktys $x^2+y^2 \leqslant 9$ ir $(x-10)^2+y^2 \leqslant 16$?

51. Ar sutaikomos atitiktys „lygiagreti" ir „statmena"? Ar jos priešingos, jeigu X ir Y — visų plokštumos tiesių aibė? Ar jos priešingos, jeigu X ir Y — aibės tiesių, lygiagrečių koordinačių ašims?

52. Sakykime, X — tiesių aibė, Y — parabolių aibė. Raskite atitikčių „tiesė eina per parabolės viršūnę" ir „tiesė lygiagreti parabolės simetrijos ašiai" sankirtą. Ar ši sankirta visur apibrėžta? Ar ji funkcinė? Ar injektyvi? Ar siurjektyvi? Atsakykite į tuos pačius klausimus apie duotąsias atitiktis.

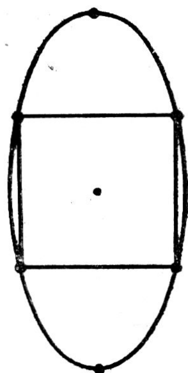




22 pav.

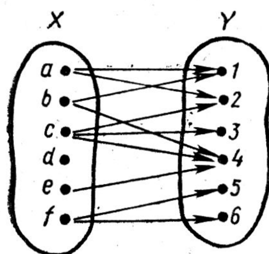
53. 22 paveiksle pavaizduoti atitikčių R ir S grafai. Nubraižykite atitikčių $R \cup S$ ir $R \cap S$, taip pat atitikčių $R \cap \bar{S}$ ir $\bar{R} \cap \bar{S}$ grafus.

8. Atitikties siaurinys. Sakykime, X — daugiakampių aibė, o Y — uždarųjų kreivių aibė. Tų aibių atitiktį „įbrėžtas į" pažymėkime R. Trikampių aibė A yra X poaibis, o apskritimų aibė B — Y poaibis. Nagrinėdami atitiktį „įbrėžtas į" tik tarp trikampių ir apskritimų, gauname naują atitiktį S. Nors ir suformuluota tais pačiais žodžiais, ji skiriasi nuo atitikties R. Pavyzdžiui, atitikties R grafikui priklauso 23 paveiksle pavaizduota pora, sudaryta iš kvadrato ir elipsės. Tačiau ta pora nepriklauso atitikties S grafikui — į ją įeina tik poros, sudarytos iš trikampių ir apie juos apibrėžtų apskritimų. Sakoma, kad S gauta, susiaurinus atitiktį R į A ir B. Naujos atitikties S grafiką gausime, atitikties R grafiką Γ_R sukirtę su dekartine sandauga $A \times B$, t. y. paprasčiau sakant, išrinkę iš Γ_R visas poras (a, b), kurių a — trikampis, b — apskritimas.



23 pav.

Apskritai, sakykime, R — aibių X ir Y atitiktis, Γ_R — jos grafikas, $A \subset X$, $B \subset Y$. Atitikties R *siauriniu* į poaibius A ir B vadinsime aibių A ir B atitiktį S, kurios grafikas yra Γ_R



24 pav.

sankirta su $A \times B$ (t. y. aibė tokių porų (a, b), kad $(a, b) \in \Gamma_R$, $a \in A$, $b \in B$).

Kartais pradinė atitiktis R vadinama S atitikties *plėtiniu* į X ir Y. Tik reikia turėti galvoje, kad R siaurinys į A ir B apibrėžtas vienareikšmiškai, o plėtinys nėra vienareikšmiškai apibrėžtas. Dalykas štai koks: kai duotas atitikties R grafikas, jo sankirta su $A \times B$ apibrėžta vienareikšmiškai. Tačiau kai duotas atitikties S grafikas Γ_S, yra daug dekartinės sandaugos $X \times Y$ poaibių, kurių sankirta su $A \times B$ yra poaibis Γ_S.

Pratimai

54. 24 paveiksle pavaizduotas aibių X ir Y atitikties R grafas. Nubraižykite šios atitikties siaurinio į poaibius $A = \{a, b, c\}$ ir $B = \{2, 4, 6\}$ grafą.

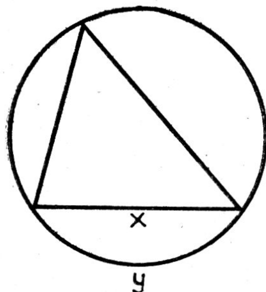
55. Sakykime, X — daugiakampių aibė, Y — realiųjų skaičių aibė, xRy — atitiktis „daugiakampio x perimetras lygus skaičiui y". Kas yra šios atitikties siaurinys į kvadratų aibę?

56. Sakykime, R — atitiktis su išeities aibe X ir paskirties aibe Y, A — jos apibrėžimo sritis ir B — reikšmių sritis. Įrodykite, kad R grafikas sutampa su R siaurinio į poaibius A ir B grafiku.

57. Sakykime, X ir Y — natūrinių skaičių aibė, R — atitiktis „dalijasi iš". Aibės X pirminių skaičių poaibį pažymėkime raide A, o R siaurinį į A pažymėkime S. Raskite atitikties S reikšmių sritį.

58. Sakykime, $X = Y$ — visų žmonių aibė, A — moterų aibė. Tarp X ir Y duota atitiktis „x yra y vaikas". Kas yra šios atitikties siaurinys į $A \subset X$? Kas yra šios atitikties siaurinys į $A \subset Y$? Kas antruoju atveju yra $a \in A$?

9. Atvirkštinė atitiktis. 25 paveikslą galima dvejopai nusakyti žodžiais: „trikampis x įbrėžtas į apskritimą y" ir „apskritimas y apibrėžtas apie trikampį x". Nors tų sakinių prasmė vienoda, juose kalbama ir apie glaudžiai vienas su kitu susijusias, bet skirtingas atitiktis. Pirmuoju atveju kalbama apie trikampių aibės X ir apskritimų aibės Y atitiktį, o antruoju — apie aibių Y ir X atitiktį. Kitaip sakant, pereinant nuo vienos atitikties prie kitos, aibės X ir Y keičiasi vietomis. Tai matyti ir iš mūsų sakinių gramatinio nagrinėjimo. Pirmajame iš jų veiksnys — „trikampis", o papildinys — „apskritimą", antrajame tų žodžių



25 pav.

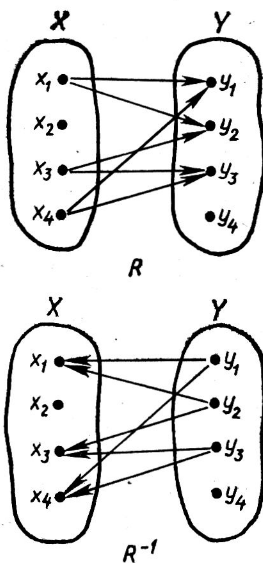
vaidmenys keičiasi. Tų dviejų atitikčių grafikai vienas su kitu susiję taip: jeigu pora (x, y) priklauso pirmosios atitikties grafikui (t. y. jeigu trikampis x įbrėžtas į apskritimą y), tai pora (y, x) priklauso antrosios atitikties grafikui (t. y. apskritimas y apibrėžtas apie trikampį x), ir atvirkščiai. Tokios dvi atitiktys vadinamos viena kitai atvirkštinėmis. Atvirkštinės viena kitai ir atitiktys „skaičius x yra skaičiaus y daliklis" ir „skaičius y yra skaičiaus x kartotinis".

Apskritai, jeigu R — aibių X ir Y atitiktis, tai jai *atvirkštine* vadinama tokia aibių Y ir X atitiktis R^{-1} kad $yR^{-1}x$ tada ir tik tada, kai xRy. Suprantama, atitiktis, atvirkštinė atitikčiai R^{-1}, vėl yra R.

Kartais kasdieninėje kalboje viena kitai atvirkštinės atitiktys vadinamos tuo pačiu žodžiu. Pavyzdžiui, jeigu X — tiesių aibė, Y — apskritimų aibė, o R — atitiktis „liečia", tai ir R^{-1} vadinama tuo pačiu žodžiu „liečia". Tačiau pirmuoju atveju tiesė x liečia apskritimą y, o antruoju — apskritimas y liečia tiesę x. Aišku, kad apskritimas y liečia tiesę x tada ir tik tada, kai tiesė x liečia apskritimą y.

Norint gauti atitikčiai R atvirkštinės atitikties R^{-1} grafiką, reikia kiekvienoje R grafiko poroje (x, y) sukeisti vietomis x ir y. Pavyzdžiui, jeigu $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ir $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$, ir $\Gamma_R=\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (y_3, y_2), (x_3, y_3)\}$, tai $\Gamma_{R^{-1}}=$ $=\{(y_1, x_1), (y_2, x_1), (y_2, x_2), (y_2, x_3), (y_3, x_3)\}$.

Tuo atveju, kai atitiktis R duota grafu, atvirkštinės atitikties R^{-1} grafą gausime, visų rodyklių kryptį pakeitę priešinga (26 pav.).



26 pav.

Pratimai

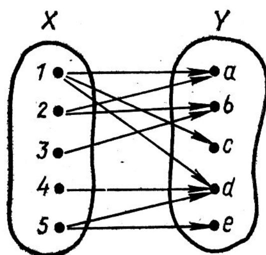
59. Duotas atitikties R grafas (27 pav.). Nubraižykite atvirkštinės atitikties R^{-1} grafą. Raskite $R^{-1}(b)$.

60. Duotas atitikties R grafikas (28 pav.). Nubraižykite atvirkštinės atitikties R^{-1} grafiką. Raskite $R^{-1}(a)$.

61. Sakykime, X — daugiakampių aibė, Y — realiųjų skaičių aibė, o xRy — atitiktis „daugiakampio x plotas lygus y". Kaip formuluojama atvirkštinė atitiktis R^{-1}, priešingoji atitiktis $\overline{R}$ ir atitiktis $(\overline{R})^{-1}$, atvirkštinė priešingajai? Ar sutampa paskutinioji atitiktis su priešinga atvirkštinei?

62. Turime atitikties R grafą. Kaip nubraižyti priešingos atvirkštinei atitikties $(\overline{R^{-1}})$ grafą?

63. Kokia atitiktis atvirkštinė atitikčiai „skaičius x yra daugianario y šaknis"?



27 pav.

Y / X	a	b	c
1	▨		▨
2		▨	▨
3	▨		
4			
5	▨		▨

28 pav.

64. Suformuluokite atitikties „žmogus x perskaitė knygą y“ atvirkštinę ir priešingąją atitiktį.

65. Raskite atitikties „detalė x apdorojama staklėmis y“ atvirkštinę ir priešingąją atitiktį.

66. Jeigu atitiktis R visur apibrėžta, tai jai atvirkštinė atitiktis R^{-1} siurjektyvi, Įrodykite.

67. Jeigu R siurjektyvi, tai R^{-1} visur apibrėžta. Įrodykite.

68. Jeigu atitiktis R injektyvi, tai R^{-1} funkcinė. Įrodykite.

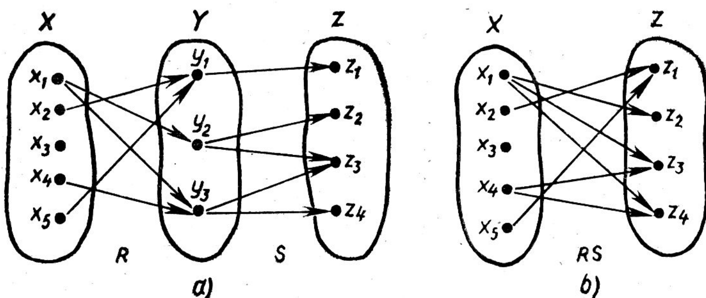
69. Jeigu R funkcinė, tai R^{-1} injektyvi. Įrodykite.

70. Ar atitiktis „x yra y brolis“ yra atvirkštinė atitikčiai „y yra x sesuo“, kai X ir Y — visų žmonių aibės? Ar atvirkštinės tos atitiktys, kai X — vyrų aibė, o Y — moterų aibė?

71. Ar atvirkštinės viena kitai atitiktys $y=x^2$ ir $x=\sqrt{y}$, kai X — realiųjų skaičių aibė, o Y — neneigiamųjų skaičių aibė? Ar atvirkštinės viena kitai tos atitiktys, kai ir X, ir Y — neneigiamųjų skaičių aibės?

10. Atitikčių kompozicija. Švambranijoje vienintelė susisiekimo priemonė yra lėktuvas. Todėl jeigu turistas x pabuvojo mieste z, tai yra toks lėktuvo reisas y, kad, pirma, tas turistas skrido reisu y, o antra, to reiso lėktuvai nusileidžia mieste z. Taigi atitiktis „turistas x pabuvojo mieste“ gaunama iš dviejų atitikčių: „turistas x skrido reiso y lėktuvu“ ir „reiso y lėktuvai nusileidžia mieste z“. Sakoma, kad ji yra tų dviejų atitikčių kompozicija.

Bendruoju atveju dviejų atitikčių kompozicija apibrėžiama taip. Sakykime, duotos trys aibės X, Y ir Z, aibių X ir Y atitiktis R ir aibių Y ir Z atitiktis S. Atitikčių R ir S *kompozicija* vadinsime tokią X ir Z atitiktį Q, kad xQz tada ir tik tada, kai yra bent vienas $y \in Y$, su kuriuo xRy ir ySz. Tokiu atveju rašoma: $Q=RS$ arba $Q=R \cdot S$. Šį truputį gremėzdišką apibrėžimą galima padaryti vaizdesniu, nubraižius atitikčių R ir S grafus. Sakykime, R ir S pateikti grafais (29 pav.). Pora (X, Z) priklauso atitikties RS grafikui, jeigu iš taško x galima patekti į tašką z, einant grafų R ir S rodyklėmis. Pavyzdžiui, pora (x_1, z_3) priklauso atitikties RS grafikui, nes iš x_1 iš pradžių galima patekti į tašką y_2, o paskui iš y_2 — į tašką z_3. O štai pora (x_1, Z_1) kompozicijos RS grafikui nepriklauso: iš taško x_1 galima patekti tik į taškus y_2 ir y_3, o iš jų nė viena rodyklė neveda į tašką z_1.



29 pav.

Pratimai

72. Duoti atitikčių R ir S grafai (30 pav.). Nubraižykite atitikties RS grafą. Raskite $(RS)(a)$ ir $(RS)^{-1}(z)$.

73. Sakykime, X — taškų aibė, Y — apskritimų aibė, Z — trikampių aibė. Apibrėžkime atitiktis xRy —„taškas x yra apskritimo y centras" ir ySz —„apskritimas y įbrėžtas į trikampį z". Ką reiškia atitiktis $x(RS)z$?

74. Sakykime, X — skaičių aibė, Y — trikampių aibė, Z — apskritimų aibė. Apibrėžkime atitiktis xRy —„skaičius x yra trikampio y plotas" ir ySz —„trikampis y apibrėžtas apie apskritimą z". Ką reiškia atitiktis RS? Yra žinoma, kad iš visų apie apskritimą apibrėžtų trikampių mažiausias plotas yra taisyklingojo trikampio. Raskite $(RS)^{-1}(z)$, jeigu z — spindulio r apskritimas.

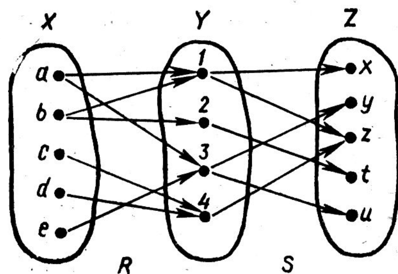
75. Raskite aibių $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ir $Z=\{z_1, z_2, z_3\}$ atitikties RS grafiką, jeigu atitikties R grafiką sudaro poros:

$$(x_1, y_2),\ (x_2, y_1),\ (x_3, y_1),\ (x_3, y_3),$$

o atitikties S grafiką — poros:

$$(y_1, z_1),\ (y_1, z_2),\ (y_2, z_1),\ (y_3, z_3),\ (y_4, z_1).$$

Raskite atitikčių $S^{-1}R^{-1}$ ir $(RS)^{-1}$ grafikus. Įrodykite, jog visada $(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}$.



30 pav.

AIBĖS SĄRYŠIAI

1. Sąryšiai, jų grafai ir grafikai. Nagrinėkime atitiktį „skaičius x didesnis už skaičių y"; čia tiek x, tiek y priklauso tai pačiai realiųjų skaičių aibei. Kai atitiktis yra „trikampis x kongruentus trikampiui y", tiek x, tiek y — trikampiai. Atitiktys, kurių išeities ir paskirties aibės sutampa, ypač svarbios, todėl jas pavadinsime specialiu terminu, būtent, *sąryšiais*. Be to, kadangi turime tos pačios aibės X elementus, kalbame ne apie X ir X atitiktis, o apie aibės X sąryšius. Pavyzdžiui, dalumas — natūrinių skaičių aibės sąryšis, kongruentumas — geometrinių figūrų aibės sąryšis, lygiagretumas ir statmenumas — tiesių aibės sąryšiai ir t. t.

Įdomu, kad nors sąryšis ir yra atskiras atitikties atvejis, vis dėlto bet kurią aibių X ir Y atitiktį galima laikyti sąryšiu tų aibių sąjungoje $X \cup Y$: užtenka iš tos sąjungos dekartinio kvadrato išskirti poras (x, y), priklausančias duotosios atitikties grafikui. Tačiau vargu ar verta nagrinėti tiesių ir apskritimų aibę arba trikampių ir skaičių aibę: geriau jas laikyti atskiromis aibėmis ir nesistengti bendrą atitikties sąvoką pakeisti atskiru jos atveju — sąryšiu.

Kadangi sąryšio sąvoka — atskiras atitikties atvejis, tai visa, kas pasakyta apie atitiktis, galima pritaikyti ir sąryšiams. Todėl galima kalbėti apie sąryšių sankirtą ir sąjungą, apie nesutaikomuosius bei priešinguosius sąryšius ir t. t. Pavyzdžiui, tiesių aibės statmenumo sąryšis nesutaikomas su lygiagretumo sąryšiu, o žmonių aibės sąryšis „vyresnis" nesutaikomas su sąryšiu „jaunesnis". Skaičių aibės sąryšių „daugiau" ir „mažiau" sąjunga yra sąryšis „nelygu", o natūrinių skaičių aibės sąryšių „dalijasi" ir „yra daliklis" sankirta yra sąryšis „lygu" (jeigu natūrinis skaičius x dalijasi iš natūrinio skaičiaus y ir tuo pat metu yra jo daliklis, tai tie skaičiai lygūs).

Tačiau tam tikrų ypatumų, kuriais pasižymi kalbamasis atskiras atvejis, vis dėlto yra. Visų pirma, sąryšis R^{-1}, atvirkštinis sąryšiui R aibėje X, pats yra sąryšis toje pačioje aibėje (juk dabar užrašе xRy tiek x, tiek y priklauso aibei X). O $yR^{-1}x$ tada ir tik tada, kai xRy. Pavyzdžiui, jeigu X — natūrinių skaičių aibė, o R — sąryšis „dalijasi iš", tai jam atvirkštinis bus sąryšis „yra daliklis", nes x dalijasi iš y tada ir tik tada, kai y yra x daliklis.

Lygiai taip pat, jeigu R ir S — aibės X sąryšiai, tai jų kompozicija yra aibės X sąryšis. Be to, ir SR yra aibės X sąryšis, nors reikia turėti galvoje, kad, apskritai kalbant, RS ir SR nesutampa. Pavyzdžiui, jeigu R — sąryšis „būti broliu", o S — „būti žmona", tai RS — sąryšis „žmonos brolis", o SR — „brolio žmona".

Vaizduojant aibės X sąryšius grafais, tos aibės elementai vaizduojami taškais tik vieną kartą, o paskui išvedamos rodyklės iš x į y, jeigu xRy. Be to, gali atsitikti taip, kad rodyklė prasideda

ir baigiasi tame pačiame taške (tokios rodyklės vadinamos kilpomis, 31 pav.).

31 pav.

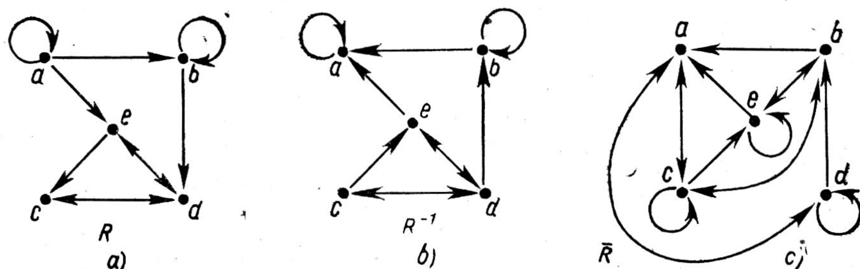
Be to, būna, kad rodyklė eina ir iš x į y, ir iš y į x (ir tiesė x lygiagreti tiesei y, ir tiesė y lygiagreti tiesei x). Šiuo atveju piešime vieną dvigubą rodyklę (32 pav.).

32 pav.

Jeigu kuris nors aibės X sąryšis R duotas grafu, tai atvirkštinio sąryšio grafas gaunamas, visas rodykles apsukus į priešingą pusę, o priešingojo sąryšio grafas — nutrynus visas esamas rodykles ir išvedus rodykles, kurių paveiksle nebuvo (33 pav.).

Jeigu skaitinės aibės X sąryšis R duotas lygybe arba nelygybe, tai jam priešingas sąryšis gaunamas ženklą $=$ pakeitus ženklu $\neq$ ir atvirkščiai, ženklą $<$ — ženklu $\geqslant$, $>$ — ženklu $\leqslant$ ir atvirkščiai. Pavyzdžiui, sąryšiui $x+y=4$ priešingas sąryšis bus $x+y\neq 4$, o sąryšiui $x+y>4$ — sąryšis $x+y\leqslant 4$.

Kad gautume sąryšį, atvirkštinį sąryšiui $F(x, y)=a$ ar sąryšiui $F(x, y)>a$, turime sukeisti vietomis x ir y. Pavyzdžiui, sąryšiui $x^2+3y^2=1$ atvirkštinis yra $y^2+3x^2=1$, o sąryšiui $8x^3+y^2>9$ atvirkštinis yra $8y^3+x^2>9$.



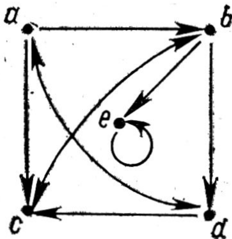
33 pav.

Pabrėšime, kad kiekvienoje aibėje X yra tapatumo sąryšis $x=y$, kuris x ir y sieja tada ir tik tada, kai x ir y sutampa. To sąryšio grafą sudaro visos kilpos, atitinkančios aibės X elementus. Jo grafiką sudaro visos poros (x, x), $x \in X$. Jeigu grafiką vaizduojame lentele su užbrūkšniuotais langeliais, tai užbrūkšniuoti reikia įstrižainės langelius (3 lentelė). Toliau tapatumo sąryšio grafiką žymėsime T.

3 lentelė

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

Jeigu R — skaičių sąryšis, tai sąryšio R^{-1} taškinis grafikas yra simetriškas sąryšio R taškiniam grafikui tiesės $y=x$ atžvilgiu.



34 pav.

Pratimai

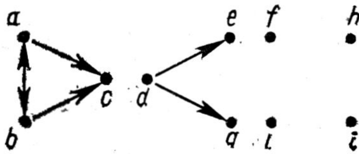
76. 34 paveiksle pavaizduotas sąryšio R aibėje $X=\{a, b, c, d, e\}$ grafas. Užrašykite šio sąryšio grafiką.

77. Sąryšio R aibėje $X=\{a, b, c, d, e, f\}$ grafiką sudaro poros: (a, a), (a, c), (a, f), (b, a), (b, e), (d, a), (d, d), (d, f), (f, b), (f, c), (f, e), (e, f). Nubraižykite to sąryšio grafą.

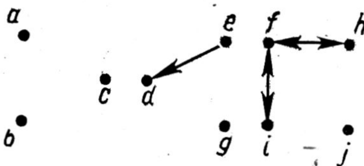
78. 35 paveiksle pavaizduotas sąryšio „x yra y brolis" žmonių aibėje $X=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ grafas. Remdamiesi grafu, nustatykite, kas yra vyras, o kas moteris. Apie kurį žmogų, remiantis šiuo grafu, negalima padaryti išvadų?

79. 36 paveiksle grafas 78 uždavinio aibėje X apibrėžia atitiktį „x yra y sesuo". Be to, čia išvestos ne visos linijos. Papildykite grafą trūkstamomis linijomis ir nustatykite, kurios lyties f, h, i.

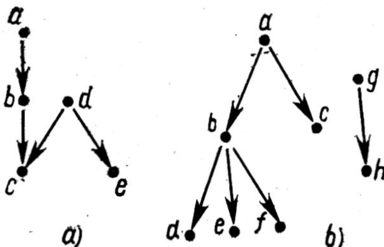
80. 37 paveiksle pavaizduoti du grafai. Vienas iš jų — sąryšio „x yra y tėvas", kitas — sąryšio „x yra y senelis" grafas. Nustatykite, kuris yra pirmojo, o kuris — antrojo sąryšio grafas.



35 pav.



36 pav.



37 pav.

81. Išvardykite jums žinomus tokių aibių sąryšius:
a) natūrinių skaičių aibė;
b) trikampių aibė;
c) apskritimų aibė;
d) valstybių aibė;
e) žmonių aibė;
f) algebrinių reiškinių aibė;
g) lygčių aibė.

82. Raskite žmonių aibės sąryšio „būti tėvu" apibrėžimo sritį ir reikšmių aibę. Atlikite tą patį su sąryšiu „būti broliu". Kuris šių sąryšių siurjektyvus? Kuris jų injektyvus?

83. Simboliniais ženklais T, M, Va, B, Se, Vy, $\check{Z}$, $S\bar{u}$, D pažymėkime žmonių aibės sąryšius „būti tėvu", „būti motina", „būti vaiku", „būti broliu", „būti seseria" „būti vyru", „būti žmona", „būti sūnumi", „būti dukteria".

a) Kokie tų sąryšių ryšiai iš čia nurodytų teisingi:

$T \subset \overline{M}$, $B^{-1} = S$, $T \cup M = Va^{-1}$, $\check{Z} \cdot T = M$,
$B \cdot S \subset B$, $S \subset Va \cdot Va^{-1}$, $Va \cdot Va^{-1} = Va^{-1} Va$, $T \subset \overline{Va}$,
$B \cdot B \subset B$, $B \subset \overline{Se}$, $B^{-1} = B \cup Se$, $B^{-1} = Se^{-1}$,
$Vy \cap \check{Z} = \varnothing$, $T \cap M = \varnothing$, $Va = S\bar{u} \cup D$, $S\bar{u} \cap D = \varnothing$?

b) Yra pavadinimų ir kitiems giminystės ryšiams, pavyzdžiui: „būti seneliu“, „būti senele“, „būti anūku“, „būti anūke“, „būti dėde“, „būti teta“, „būti sūnėnu“, „būti dukterėčia“, „būti pusbroliu“, „būti pussesere“, „būti žentu“ (dukters vyru), „būti marčia“ (sūnaus žmona), „būti uošviu“ (žmonos tėvu), „būti uošve“ (žmonos motina), „būti šešuru“ (vyro tėvu), „būti anyta“ (vyro motina), „būti svainiu“ (žmonos broliu), „būti dieveriu“ (vyro broliu), „būti moša (vyro seseria), „būti jente (brolio žmona)“. Išreikškite šiuos sąryšius anksčiau minėtais devyniais sąryšiais.

c) Kaip vadinami šie sąryšiai:
Vy^{-1}, $Vy \cup \check{Z}$, $T \cup M$, $T \cdot M$, $T \cdot T$, $M \cdot T$,
$B \cdot T$, $B \cdot M$, $M \cdot B$, $M \cdot M$, $M \cdot Va^{-1}$, $Se \cdot Va^{-1}$, $B \cdot Va^{-1}$?

84. Kurie iš išvardytų sąryšių funkciniai:
a) $2x + y = 12$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
b) $x^2 = y^2$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
c) $|x| = |y+2|$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
d) $x + y = y^2$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
e) x yra y motina;
f) x yra y duktė?

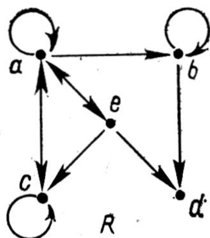
85. Raskite formule $y = x^2 + 1$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, išreikštos funkcijos apibrėžimo sritį ir reikšmių aibę.

86. Kurios iš 84 pratimo funkcijų apibrėžia bijektyvųjį atvaizdį?

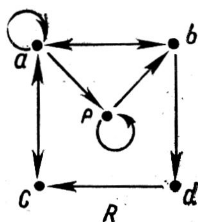
87. Raskite skaičiaus 3 vaizdą tokiuose realiųjų skaičių aibės sąryšiuose:
a) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;
b) $y \geqslant x^2 + 1$,

88. a) Gramatiškai išnagrinėkite sakinį.
„Po mūšio Kursko lanke tarybinė kariuomenė pradėjo pulti Oriolo ir Belgorodo kryptimi“.
Nagrinėjimo rezultatą pavaizduokite grafu, kuriame būtų tik žodžių numeriai ir sąryšio rūšies nuorodos (prielinksnius ir jungtukus praleiskite).
b) Nurodykite sakinio
„Nelieskit palaidotų
žemėje priešo karių“
gramatinio nagrinėjimo visas galimybes ir kiekvieną galimybę pavaizduokite grafu.

89. 38 paveiksle pavaizduotas sąryšio R grafas. Nubraižykite šių sąryšių grafus: R^{-1}, R^2, RR^{-1},
$R^{-1}R$, $\overline{R}$, $R\overline{R}$.



38 pav.



39 pav.

90. Duoti aibės X du sąryšiai R ir S; jų grafai pavaizduoti 39 paveiksle. Nubraižykite tokių aibės X sąryšių grafus: R^{-1}, S^{-1}, RS, $R^{-1}S$, RS^{-1}, $R\bar{S}$, SR. Sudarykite tų sąryšių grafikus.

91. Įrodykite tokias formules, siejančias lygiagretumo ir statmenumo sąryšius plokštumos tiesių aibėje:

a) $\|^{-1}=\|$; b) $\perp^{-1}=\perp$; c) $\|\cdot\|=\|$; d) $\perp\cdot\perp=\|$; e) $\|\cdot\perp=\perp$; f) $\perp\cdot\|=\perp$.

92. Duota aibė $X=\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$. Sudarykite tokių aibės X sąryšių grafikus.

a) x mažiau už y;
b) x dalijasi iš y;
c) x dukart daugiau už y;
d) x dviem daugiau už y.

93. Kazlauskų šeimos narių aibę X sudaro tėvas, motina ir keturi vaikai: Andrius, Birutė, Gintas ir Nijolė (vaikai išvardyti amžiaus mažėjimo tvarka).

a) Išvardykite visas aibės X elementų, susietų sąryšiu „būti dukteria“, poras ir nubraižykite šio sąryšio grafą.

b) Nubraižykite sąryšio „būti vyresniam“ grafą, jeigu tėvas vyresnis už motiną.

c) Nubraižykite sąryšio „būti motina“ grafą. Ar šis sąryšis atvirkštinis sąryšiui „būti vaiku“?

d) Ar sąryšis „būti dukteria“ yra atvirkštinis sąryšiui „būti gimdytoju“?

e) Koks sąryšis yra atvirkštinis sąryšiui „būti gimdytoju“? Nubraižykite sąryšio „būti gimdytoju“ ir jam atvirkštinio sąryšio grafus.

94. Aibėje $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ apibrėžtas sąryšis R „dalijasi iš“. Raskite $R^{-1}(\{2, 3, 4\})$.

95. Koks skaičių aibės sąryšis atvirkštinis sąryšiui „mažiau“? O koks sąryšis priešingas sąryšiui „mažiau“?

96. Pavaizduokite sąryšio $y=x+2$ aibėje $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ taškinį grafiką.

97. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite aibę taškų $A(m, n)$ su sveikomis koordinatėmis, kai

a) $0 \leqslant m \leqslant 9$, $\quad -3 \leqslant n \leqslant 3$;
b) $m = 2$, $\quad -5 < n < 4$;
c) $m = 2n$, $\quad -4 \leqslant m \leqslant 4$;
d) $0 \leqslant m \leqslant n$, $\quad 0 \leqslant n \leqslant 6$;
e) $m + n = 4$, $\quad m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
f) $m + n < 5$, $\quad m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$.

98. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite aibę taškų $M(x, y)$, kai

a) $x = 2y$, $\quad -5 \leqslant x \leqslant 5$;
b) $x + y = 4$, $\quad x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
c) $x + y \leqslant 4$, $\quad x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
d) $y = 2x$, $\quad -3 \leqslant x \leqslant 3$;
e) $x - y \leqslant 6$, $\quad x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
f) $x = 2$, $\quad -4 \leqslant y \leqslant 3$;
g) $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $\quad -2 \leqslant x \leqslant 5$;
h) $y = 3$, $\quad -2 \leqslant y \leqslant 4$.

99. Realiųjų skaičių aibėje apibrėžtas sąryšis $y \geqslant x^2$. Koks sąryšis jam atvirkštinis? Koks sąryšis jam priešingas?

100. Raskite sąryšio $x + y = 8$ apibrėžimo sritį ir reikšmių aibę, jeigu x ir y — natūriniai skaičiai.

101. Pavaizduokite sąryšio $y = 3x$ aibėje $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ taškinį grafiką.

102. Sakykime, X ir Y — aibės, nurodytos 5 uždavinyje, o R — atitiktis „į žodį x įeina raidė y“. Sudarykite aibės X sąryšio RR^{-1} ir aibės Y sąryšio $R^{-1}R$ grafikus. Nubraižykite tų sąryšių grafus. Raskite RR^{-1} (tėtė) ir $R^{-1}R$ (k).

103. Nubraižykite realiųjų skaičių aibės sąryšių $R: y \geqslant x^2$ ir $S: x^2 + y^2 \leqslant 25$ sankirtos grafiką. Nubraižykite tų pačių sąryšių sąjungos grafiką. Nubraižykite sąryšių $(R \cap S)^{-1}$ ir $(R \cup S)^{-1}$ grafikus.

104. Kuo vienas nuo kito skiriasi sąryšių

$$y \geqslant x^2 + 4x + 4 \text{ ir } y > x^2 + 4x + 4$$

grafikai?

105. Nubraižykite šių sąryšių grafikus:

a) $y \geqslant 4x - 8$;
b) $(x-5)^2 + (y-1)^2 \leqslant 36$;
c) $y \leqslant x^2 - 4x + 3$;
d) $|y| > |x + 1|$;
e) $y \geqslant 2x^2$;
f) $\sqrt{y^2 - 4x^2y + 4x^4} = 1$.

106. Raskite nurodytų sąryšių grafikų sankirtą:

a) $x+y=9$ ir $xy=14$;
b) $x^2+y^2=169$ ir $x^2-y^2=119$;
c) $x^2+y^2=29$ ir $xy=10$.

107. Kurios iš skaičių porų: $(1, -1)$, $(5, 5)$, $(13, 11)$, $(-8, -6)$, $(17, 1)$, $(-7, 1)$:

a) priklauso sąryšio $x^2+y^2=50$ grafikui;
b) priklauso sąryšio $x^2-y^2=48$ grafikui;
c) priklauso tų sąryšių sankirtos grafikui?

108. Ar lygūs $R \cap S$ ir $Q \cap S$, jeigu
$R: x^2+y^2=25$, $S: x+y=7$, $Q: xy=12$?

109. Nubraižykite tokių sąryšių sankirtų grafikus:

a) $x^2+y<9$ ir $y \leqslant x^2$;
b) $x^2+y^2 \leqslant 25$ ir $x+y \geqslant -1$;
c) $x^2+y^2 \leqslant 25$ ir $y>x^2$;
d) $y \geqslant \frac{1}{2}x^2$ ir $y \geqslant \frac{3}{2}x-1$;
e) $(x-1)^2+(y+2)^2 \leqslant 26$ ir $2x+y=1$;
f) $x^2+y^2 \leqslant 25$ ir $y=\frac{4}{9}x^2$.

110. Nubraižykite tų pačių sąryšių sąjungų grafikus.

111. Parašykite išvardytų sąryšių atvirkštinį, priešingąjį ir atvirkštinį priešingajam sąryšį:

a) $x^2+6y^2>1$;
b) $x^2+8x+4y^2+1 \geqslant 6$;
c) $x^4+16y^4 \geqslant 81$;
d) $\frac{3x^2-y^2}{2x^2+y^2} \geqslant 0$.

2. Sąryšių savybės. Kalbant apie kurį nors aibės X sąryšį R, galima nagrinėti bet kurias tos aibės elementų poras (x, y) ir tikrinti, teisinga xRy ar neteisinga. Tarp jų gali būti ir poros (x, x), sudarytos iš vienodų elementų, t. y. dekartinio kvadrato $X \times X$ įstrižainė T. Gali atsitikti, kad visoms tokioms poroms teisinga xRx. Pavyzdžiui, jeigu R — kongruentumo sąryšis geometrinių figūrų aibėje, tai visada xRx, nes kiekviena figūra kongruenti pati sau. Tą pačią savybę turi ir sąryšis „mokytis vienoje klasėje“ mokinių aibėje: xRx su visais x — kiekvienas mokinys mokosi vienoje klasėje su pačiu savimi. Pabrėšime: jog, pakeitus mokinių aibę platesne visų žmonių aibe, ta savybė dingsta — jeigu kuris nors žmogus nesimoko, tai negalima sakyti, kad jis mokosi vienoje klasėje su pačiu savimi.

Minėtą sąryšių savybę vadinsime *refleksyvumu* (iš lotyniško žodžio *reflectio* — atspindys; užraše xRx elementas x tarsi atsispindi nuo raidės R). Taigi sąryšis R aibėje X vadinamas *refleksyviu,* jeigu xRx su visais $x \in X$. Formaliau refleksyvumo savybę

galima užrašyti taip: $T \subset R$ (sąryšis yra tapatumo sąryšio išvada)[1].

Daugelis mokyklinėje matematikoje nagrinėjamų sąryšių pasižymi refleksyvumo savybe. Pavyzdžiui, lygiagretumo sąryšis tiesių aibėje refleksyvus, nes kiekviena tiesė laikoma lygiagrečia jai pačiai, $x \| x$. Refleksyvus ir panašumo sąryšis geometrinių figūrų aibėje, ir ekvivalentumo sąryšis lygčių aibėje, ir sąryšis „būti tų pačių tėvų vaiku" žmonių aibėje ir t. t.

Statmenumo sąryšis tiesių aibėje nėra refleksyvus. Maža to, nė viena tiesė nėra statmena jai pačiai, t. y. statmenumo ir tapatumo sąryšiai nesutaikomi. Tokius sąryšius vadinsime antirefleksyviais. Kitaip tariant, sąryšis R aibėje X vadinamas *antirefleksyviu,* jeigu jis nesutaikomas su tapatumo sąryšiu, $R \cap T = \varnothing$, arba (o tai vienas ir tas pats) jeigu iš jo išplaukia skirtingumo sąryšis (pavyzdžiui, tiesėms iš to, kad $x \perp y$, išplaukia, jog $x \neq y$). Antirefleksyvūs taip pat ir sąryšiai „daugiau" ir „mažiau" skaičių aibėje, „lengvesnis" ir „sunkesnis", „vyresnis" ir „jaunesnis" žmonių aibėje ir t. t. Sąryšis „mokytis vienoje klasėje" nėra nei refleksyvus, nei antirefleksyvus.

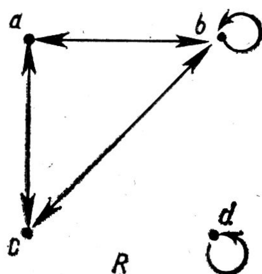
Apskritai kalbant iš xRy neišplaukia, jog ir yRx. Pavyzdžiui, jeigu žmogus x žino apie žmogaus y egzistavimą, tai iš to dar neišplaukia, jog ir y žino, kad egzistuoja x (vargu ar Anatolijus Karpovas žino visus jo šachmatų talento gerbėjus). Tačiau yra sąryšių, į kuriuos x ir y įeina simetriškai, t. y. iš xRy visada išplaukia yRx. Pavyzdžiui, žmonių aibės sąryšis „pažįstamas" tą savybę turi: jeigu x pažįstamas su y, tai ir y pažįstamas su x. Norint pabrėžti tą simetriškumą, dažnai pridedamas žodis „vienas su kitu": žmonės x ir y vienas su kitu pažįstami.

Tokia sąryšio R savybė, kai iš xRy išplaukia yRx, vadinama to sąryšio *simetriškumu.* Formaliai galima pasakyti, kad sąryšis R simetriškas tada ir tik tada, kai jis sutampa su jam atvirkštiniu sąryšiu: $R = R^{-1}$. Iš tikrųjų, vietoj yRx galima parašyti $xR^{-1}y$, ir tada iš xRy išplaukia $xR^{-1}y$, o iš $xR^{-1}y$ išplaukia xRy, todėl $R = R^{-1}$. Simetriškų sąryšių pavyzdžiais galima laikyti lygiagretumą tiesių aibėje, lietimąsi apskritimų aibėje, kongruentumą geometrinių figūrų aibėje, liekanų lygumą dalijant iš 7 natūrinių skaičių aibėje ir t. t. Jeigu sąryšis R simetriškas, tai jo grafą sudaro dvigubos rodyklės ir kai kurios (nebūtinai visos) kilpos (40 pav.). Jeigu tokį sąryšį apibrėšime lentele, tai subrūkšniuotų langelių aibė bus simetriška įstrižainės T atžvilgiu (41 pav.). Jeigu simetrišką sąryšį apibrėšime taškiniu grafiku, tai gausime aibę, simetrišką tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Žinoma, ne kiekvienas sąryšis pasižymi simetriškumo savybe. Pavyzdžiui, nei sąryšis „aukštesnis", nei sąryšis „sunkesnis" šitos savybės neturi. Maža to, tų sąryšių grafikai nekerta jiems

---

[1] Paprastumo dėlei tapatumo sąryšį aibėje X žymime ta pačia raide T, kaip ir jo grafiką.



40 pav.

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

R

41 pav.

atvirkštinių sąryšių grafikų (negali būti, kad vienu metu ir x aukštesnis už y, ir y aukštesnis už x). Jeigu sąryšių R ir R^{-1} grafikai nesikerta (t. y. nėra tokių x ir y kad būtų teisinga ir xRy, ir yRx), tai R vadinamas *asimetrišku sąryšiu* (savaime suprantama, kad tada ir sąryšis R^{-1} asimetriškas). Asimetriškojo sąryšio sąjunga su tapatumo sąryšiu vadinama *antisimetrišku* sąryšiu. Kitaip tariant, sąryšis R vadinamas antisimetrišku, jeigu jis refleksyvus ir iš xRy ir yRx išplaukia, jog $x=y$. Antisimetriškųjų sąryšių pavyzdžiais gali būti sąryšiai „ne daugiau“, „ne mažiau“, „ne aukštesnis“ ir t. t.

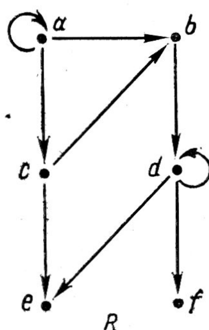
Figūrų kongruentumo sąryšis pasižymi dar viena svarbia savybe: jeigu figūra x kongruenti figūrai y, o figūra y — figūrai z, tai x kongruenti z. Tokia sąryšių savybė vadinama tranzityvumu. Apskritai, aibės X sąryšis R vadinamas *tranzityviu*, jeigu iš xRy ir yRz išplaukia xRz. Remiantis sąryšių kompozicijos sąvoka, šią sąlygą galima užrašyti taip: $R \cdot R \subset R$. Iš tikrųjų, $x(R \cdot R)z$ reiškia, jog yra toks elementas y, kad xRy ir yRz. Tada iš tranzityvumo gauname, jog xRz. Tačiau tai ir reiškia, jog iš $x(R \cdot R)z$ išplaukia xRz, t. y. kad $R \cdot R \subset R$.

Be kongruentumo sąryšio, tranzityvumo savybe pasižymi tiesių lygiagretumo sąryšis (jeigu tiesė x lygiagreti tiesei y, o tiesė y — tiesei z, tai x lygiagreti z), dalumo sąryšis (jeigu x dalijasi iš y, o y dalijasi iš z, tai x dalijasi iš z) ir kt. Statmenumo sąryšis plokštumos tiesių aibėje netranzityvus: jeigu $x \perp y$ ir $y \perp z$, tai ne tik negalima daryti išvados $x \perp z$,— dar daugiau, galima teigti, kad tiesės x ir z nėra statmenos. Kitaip tariant, sąryšių R^2 (taip trumpiau žymima kompozicija RR) ir R sankirta tuščia: $R^2 \cap R = \varnothing$. Tokie sąryšiai vadinami *antitranzityviais*.

Jeigu sąryšis R tranzityvus ir jo grafe yra rodyklės iš x į y ir iš y į z, tai būtinai yra ir rodyklė, einanti iš x į z. Tiek daug rodyklių trukdo pavaizduoti grafą. Todėl tranzityviųjų sąryšių grafe vaizduojama tik dalis rodyklių, o žodžiais nurodoma, kad sąryšis R tranzityvus. Štai 42 paveiksle dalis rodyklių praleista.

Bet kuriuos skirtingus skaičius x ir y sieja sąryšis $x<y$ arba $y<x$. Tačiau sąryšis $y<x$ yra atvirkštinis sąryšiui R: $x<y$. Tai reiškia, kad visa dekartinė sandauga $X \times X$ yra trijų poaibių — įstrižainės, sąryšio R grafiko ir jam atvirkštinio sąryšio R^{-1} grafiko — sąjunga. Turinčius tokią savybę sąryšius vadinsime jungiais. Taigi aibės X sąryšis R vadinamas *jungiu*,

jeigu dekartinė sandauga $X \times X$ yra sąjunga trijų poaibių: $T=\{(x, x) \mid x \in X\}$, sąryšio R grafiko ir jam atvirkštinio sąryšio R^{-1} grafiko. Sąryšis „dalijasi iš" natūrinių skaičių aibėje nėra jungus, nes yra tokių nelygių natūrinių skaičių x ir y, kad nei x dalijasi iš y, nei y dalijasi iš x. O štai aibėje $X=\{2^n \mid n \in N\}$ sąryšis „dalijasi iš" jungus, nes su bet kuriais m ir n arba 2^m dalijasi iš 2^n, arba 2^n dalijasi iš 2^m.



42 pav.

Pratimai

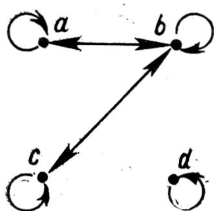
112. Aibėje $X=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ apibrėžtas sąryšis „būti dalikliu". Nubraižykite jo grafą ir nurodykite, kuriomis iš anksčiau minėtų savybių (refleksyvumu, antirefleksyvumu, simetriškumu, asimetriškumu, antisimetriškumu, tranzityvumu, antitranzityvumu, jungumu) pasižymi šis sąryšis.

113. Kuriomis iš minėtų savybių pasižymi šie sąryšiai:

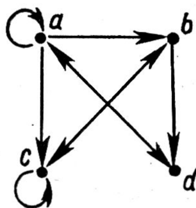
a) kongruentumas (geometrinių figūrų aibėje);
b) panašumas (toje pačioje aibėje);
c) lygiagretumas (plokštumos tiesių aibėje);
d) statmenumas (toje pačioje aibėje);
e) koncentriškumas (plokštumos apskritimų aibėje);
f) lietimas (toje pačioje aibėje);
g) kirtimas (toje pačioje aibėje);
h) būti mažesniam (realiųjų skaičių aibėje);
i) būti ne didesniam kaip (sveikųjų skaičių aibėje);
j) dalytis iš (natūrinių skaičių aibėje);
k) priešingumas (realiųjų skaičių aibėje);
l) gyventi viename name (žmonių aibėje);
m) gyventi vienoje gatvėje (toje pačioje aibėje);
n) būti panašiam (toje pačioje aibėje);
o) būti tėvu (toje pačioje aibėje);
p) būti sutuoktiniu (toje pačioje aibėje);
r) būti broliu (toje pačioje aibėje);
s) sverti 3 kg daugiau (žuvų aibėje);
t) sverti daugiau (toje pačioje aibėje);
u) gimti vėliau (žmonių aibėje);
v) būti reliatyviai pirminiams (natūrinių skaičių aibėje);
z) turėti netuščią sankirtą (netuščiųjų geometrinių figūrų aibėje);
ž) vykti vienu metu (fizikinių reiškinių aibėje)?

114. Kurie išvardytieji žmonių sąryšiai yra refleksyvūs, kurie — simetriški ir kurie — tranzityvūs.

a) būti seseria;
b) būti viršininku;
c) būti draugu;



43 pav.



44 pav.

d) būti tėvu;

e) turėti tą pačią akių spalvą (į atspalvius neatsižvelgiama)?

115. 43 paveiksle pavaizduotas sąryšio R grafas. Išvardykite to sąryšio savybes.

116. Aibės $X=\{a, b, c, d, e, f\}$ sąryšio R grafiką sudaro šios poros:

$$(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c),$$
$$(c, b), (b, b), (d, f), (f, d),$$
$$(c, c), (d, d), (f, f).$$

Kokiomis savybėmis pasižymi tas sąryšis? Kokias poras reikia prijungti, kad gautume refleksyvųjį sąryšį?

117. Aibės $X=\{a, b, c, d, e\}$ sąryšio R grafiką sudaro šios poros: (a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, e). Kokias poras reikia prijungti, kad gautume simetriškojo sąryšio grafiką? Kokias poras reikia prijungti, kad gautume tranzityviojo sąryšio grafiką?

118. 44 paveiksle pavaizduotas sąryšio R grafas. Kokias linijas reikia prijungti, kad gautume refleksyviojo sąryšio grafą? Ką reikia padaryti, kad gautume simetriškojo sąryšio grafą? Ką reikia padaryti, kad gautume tranzityviojo sąryšio grafą?

119. Įrodykite, kad sąryšio R sąjunga su jam atvirkštiniu sąryšiu R^{-1} yra simetrinis sąryšis.

120. Įrodykite, kad sąryšio R sankirta su jam atvirkštiniu sąryšiu R^{-1} yra simetrinis sąryšis.

121. Įrodykite, kad sąryšio R sankirta su sąryšiu R^{-1}, priešingu sąryšiui R^{-1}, yra asimetriška.

122. Įrodykite, kad asimetrinio sąryšio sankirta su tapatumo sąryšiu tuščia.

123. Įrodykite, kad bet kuris aibės X sąryšis yra simetrinio ir asimetrinio sąryšio sąjunga.

124. Įrodykite, kad simetrinio ir asimetrinio sąryšio sankirta tuščia.

125. Ar teisingas teiginys, kad bet kuris sąryšis arba simetrinis, arba antisimetrinis? Pateikite pavyzdžių.

126. Pateikite keletą antitranzityviųjų sąryšių pavyzdžių. Ar teisingas teiginys, kad kiekvienas sąryšis arba tranzityvus, arba antitranzityvus?

3. Ekvivalentumo sąryšiai. Sulūžusi kokia nors automobilio detalė keičiama tos pačios detalės kitu egzemplioriumi. Skirtingi tos pačios detalės egzemplioriai neatskiriami; sakoma, kad jie yra ekvivalentūs (lygiaverčiai). Lygiai taip pat ekvivalenčios visos tos pačios vertės ir tų pačių metų kaldinimo monetos, visi to

paties modelio ir dydžio kostiumai, pasiūti iš tos pačios medžiagos, ir t. t.

Ne visada ekvivalentumas reiškia paprastą vienodumą. Pavyzdžiui, jeigu reikia sumokėti 1 rublio sumą, tai popierinis ir metalinis rublis vienas kitam ekvivalentūs, lygiai kaip ir 5 dvidešimtkapeikiai ar 20 penkiakapeikių. Fizikoje ekvivalenčiais laikomi vienas kitą pakeičiantys energijos kiekiai (pavyzdžiui, 1 kcal ekvivalenti 4 190 J ir t. t.).

Išsiaiškinkime, kokiomis bendromis savybėmis pasižymi objektų pakeičiamumo sąryšis. Visų pirma, aišku, kad kiekvienas objektas gali pakeisti jį patį. Tai reiškia, kad su visais x turi būti teisingas sąryšis xRx, t. y. pakeičiamumo sąryšis turi būti refleksyvus. Antra, jeigu x pakeičiamas y, tai ir y pakeičiamas x. Kitaip sakant, jeigu xRy, tai ir yRx, todėl R simetriškas. Pagaliau, jeigu x pakeičiamas y, o y pakeičiamas z, tai x pakeičiamas z. Kitaip sakant, iš xRy ir yRz išplaukia xRz, t. y. R tranzityvus.

Taigi pakeičiamumo sąryšis turi pasižymėti refleksyvumo, simetriškumo ir tranzityvumo savybėmis. Suformuluokime tokį apibrėžimą:

Aibės X ekvivalentumo sąryšiu vadinamas kiekvienas refleksyvus, simetriškas ir tranzityvus sąryšis R.

Pateiksime tokių sąryšių pavyzdžių.

a) Geometrinių figūrų kongruentumo sąryšis refleksyvus (kiekviena figūra kongruenti pati sau), simetriškas (jeigu figūra x kongruenti figūrai y, tai ir figūra y kongruenti figūrai x) ir tranzityvus (jeigu figūra x kongruenti figūrai y, o figūra y — figūrai z, tai x ir z kongruenčios). Vadinasi kongruentumo sąryšis — tai ekvivalentumas geometrinių figūrų aibėje.

b) Geometrinių figūrų panašumo sąryšis taip pat yra ekvivalentumo sąryšis.

c) Tiesių lygiagretumo sąryšis taip pat pasižymi refleksyvumo, simetriškumo ir tranzityvumo savybėmis, taigi yra ekvivalentumo sąryšis tiesių aibėje.

d) Dviejų lygčių ekvivalentumo sąryšis refleksyvus (kiekviena lygtis ekvivalenti pati sau), simetriškas (jeigu viena lygtis ekvivalenti kitai, tai ir antroji ekvivalenti pirmajai) ir tranzityvus. Taigi jis yra ekvivalentumas lygčių aibėje. (Matome, kad įprastinė lygčių ekvivalentumo sąvoka gerai dera prie ekvivalentumo sąryšio sąvokos, tas pats žodis „ekvivalentumas" vienur ir kitur vartojamas ne atsitiktinai.)

e) Trupmenų lygumo sąryšis taip pat yra ekvivalentumas. Iš tikrųjų, trupmenos $\frac{a}{b}$ ir $\frac{c}{d}$ lygios tada ir tik tada, kai $ad=bc$. Lengva patikrinti, kad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (tikrinamoji lygybė virsta $ab=ab$) ir kad iš $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ išplaukia $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ (iš $ad=bc$ išplaukia $cb=da$).

Įrodykime šio sąryšio tranzityvumą. Sakykim, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ir $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$. Tai reiškia, kad $ad=bc$ ir $cf=de$. Tačiau tada $adf=bcf$ ir $bcf=bde$, taigi $adf=bde$. Iš čia gauname, kad $af=be$, o tai ir reiškia $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$.

Sąryšis „gyventi viename name" yra ekvivalentumas žmonių aibėje (jis refleksyvus, simetriškas ir tranzityvus), o sąryšis „gyventi vienoje gatvėje" nėra ekvivalentumas. Mat, žmogus y gali gyventi kampiniame name dviejų gatvių sankryžoje, o x ir z — tose susikertančiose gatvėse. Tada tiek x ir y, tiek y ir z gyvena vienoje gatvėje, bet x ir z gyvena skirtingose gatvėse. Nėra ekvivalentumas ir sąryšis „tarnauti viename pulke" kariškių aibėje. Jis simetriškas ir tranzityvus, bet nėra refleksyvus — yra kariškių, nepriklausančių jokiam pulkui (pavyzdžiui, generolai), ir apie juos negalima pasakyti, kad jie tarnauja viename pulke patys su savimi.

Pratimai

127. Kurie iš 113 pratime išvardytų sąryšių yra ekvivalentumo sąryšiai?

128. Ar sąryšis „turėti vienodas liekanas, dalijant iš 7" yra ekvivalentumo sąryšis?

129. Kokius ekvivalentumo sąryšius galite nurodyti jūsų klasės mokinių aibėje?

130. Ar sąryšis „lankyti vieną sporto sekciją" jūsų klasės mokinių aibėje yra ekvivalentumo sąryšis?

131. Kurie iš šių sąryšių yra ekvivalentumo sąryšiai:
a) būti tiek pat nutolusiam nuo Maskvos (miestų aibėje);
b) priklausyti vienai genčiai (gyvūnų aibėje);
c) būti pusbroliu ar pussesere (žmonių aibėje);
d) turėti bendrą sieną (valstybių aibėje)?

4. Ekvivalentumo klasės. Mokyklos visų mokinių aibė suskirstyta į klases 1*a*, 1*b*, ..., 11*b*. Su tuo suskirstymu susijęs sąryšis „mokytis vienoje klasėje", kuris yra ekvivalentumas. Apskritai, sakykime, aibė X suskaidyta į nesikertančius poaibius, t. y. išreikšta sąjunga poaibių X_α, X_β, ..., kurių jokie du nesikerta: $X=\bigcup_\alpha X_\alpha$ ir $X_\alpha \cap X_\beta=\varnothing$, kai $\alpha \neq \beta$. Aibėje X apibrėžkime sąryšį R: x priklauso tam pačiam skaidinio poaibiui, kaip ir y". Apibrėžtasis sąryšis R yra ekvivalentumas. Iš tikrųjų, R refleksyvus, nes kiekvienas elementas x priklauso vienam iš skaidinio poaibių, taigi yra viename poaibyje pats su savimi; R simetriškas — jeigu x yra viename skaidinio poaibyje su y, tai ir y yra viename poaibyje su x; pagaliau tas sąryšis tranzityvus: jeigu x yra viename poaibyje su y, o y — viename poaibyje su z, tai x ir z pri-

klauso tam pačiam poaibiui (čia rėmėmės sąlyga, kad poaibiai poromis nesikerta — kitaip galėtų atsitikti, kad x ir z yra skirtinguose poaibiuose, o y priklauso tų poaibių sankirtai).

Taigi su kiekvienu aibės skaidiniu į kas du nesikertančius poaibius susijęs tam tikras ekvivalentumo sąryšis. Svarbu, kad tokiu būdu galima gauti bet kurį ekvivalentumo sąryšį. Tikrai, sakykime, R — bet kuris aibės X ekvivalentumo sąryšis. Įrodysime, kad bet kurios dvi aibės $R(a)$ ir $R(c)$ arba sutampa, arba nesikerta (primename, kad $R(a)$ reiškia elemento a vaizdą sąryšyje R, t. y. aibę visų tokių elementų y, kad aRy). Tuo įsitikinsime, įrodę tokį dalyką: jeigu $R(a)$ ir $R(c)$ sankirta netuščia, tai $R(a)=R(c)$. Tarkime, kad $b \in R(a) \cap R(c)$. Kadangi $b \in R(c)$, tai cRb, o tada, remdamiesi R simetriškumu, gauname bRc. Tačiau kadangi R tranzityvus, tai iš aRb ir bRc išplaukia aRc. Dabar nagrinėkime bet kurį elementą $z \in R(c)$. Tada cRz, o iš aRc ir cRz gauname aRz, t. y. $z \in R(a)$. Vadinasi, kiekvienas elementas iš $R(c)$ priklauso ir $R(a)$, todėl $R(c) \subset R(a)$. Panašiai įrodome, kad $R(a) \subset R(c)$, todėl $R(a)=R(c)$.

Taigi skirtingi poaibiai $R(a)$ nesikerta vienas su kitu. Remdamiesi R refleksyvumu, turime: $a \in R(a)$, todėl visų $R(a)$, $a \in X$, sąjunga sutampa su X. Gavome aibės X skaidinį į kas du nesikertančius poaibius.

Aibės skaidymas į kas du nesikertančius poaibius yra visų klasifikacijų pagrindas. Pavyzdžiui, bibliotekose visų knygų aibė suskirstoma į matematikos, fizikos, chemijos, istorijos knygas ir t. t., biologijoje visų gyvūnų aibė skirstoma į rūšis, rūšių aibė — į gentis ir t. t.

Pratimai

132. 45 paveiksle pavaizduoti trikampiai. Suskirstykite juos į ekvivalentumo klases:
a) pagal kampų savybes;
b) pagal kraštinių savybes.

133. Ar galima trikampių aibę suskaidyti į šias klases: įvairiakraščiai, lygiašoniai ir lygiakraščiai?

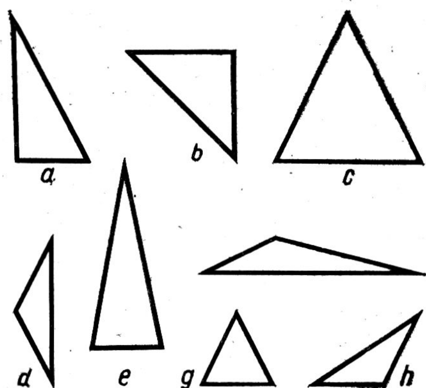
134. Ar galima sveikųjų skaičių aibę suskaidyti į teigiamųjų ir neigiamųjų skaičių poaibius?

135. Plokštumoje nubrėžta tiesė l. Ar galima pasakyti, kad visų tos plokštumos tiesių aibė suskaidoma į tris klases: lygiagrečios tiesei, statmenos jai ir kertančios tą tiesę?

136. Į kokias klases natūrinių skaičių aibę suskaido sąryšis „dalijamas iš 7, duoda tą pačią liekaną“?

137. Į kokius poaibius mokinių aibę suskaido sąryšis „mokytis vienoje mokykloje“?

138. Ar galima mokinius suklasifikuoti į pirmūnus, pionierius ir berniukus?



45 pav.

139. Plokštumoje nubrėžtas apskritimas. Ar galima visų tos plokštumos apskritimų aibę suskirstyti į dvi klases: liečiantys tą apskritimą ir kertantys jį dviejuose taškuose? Kokią apskritimų klasę dar reikia pridėti?

140. Į kokias klases skirstoma lietuviškų žodžių aibė?

141. Į kokias klases skirstoma sakinio žodžių aibė?

142. Į kokias klases skirstoma vandens telkinių aibė?

143. Sąryšis R refleksyvus ir tranzityvus. Įrodykite, kad sankirta $R \cap R^{-1}$ yra ekvivalentumo sąryšis. Ar $R \cup R^{-1}$ yra ekvivalentumo sąryšis?

144. Ar lygčių aibės sąryšis „būti ekvivalenčiu" yra ekvivalentumo sąryšis?

145. Lygiagretumo sąryšis yra refleksyvus, simetriškas ir tranzityvus. Į kokias klases tas sąryšis suskaido plokštumos tiesių aibę? Suformuluokite krypties plokštumoje apibrėžimą.

146. Apskritimų koncentriškumo sąryšis yra refleksyvus, simetriškas ir tranzityvus. Į kokias klases tas sąryšis suskaido plokštumos apskritimų aibę? Nurodykite plokštumos taškų aibės ir ekvivalentumo klasių aibės bijektyviąją atitiktį.

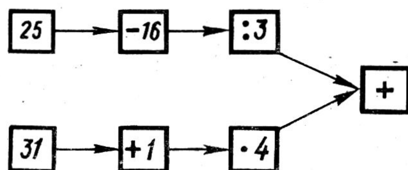
147. Du daiktavardžius vadinsime sukeičiamais, jeigu bet kuriame sakinyje, kuriame pasitaiko vienas tų daiktavardžių, jį galima pakeisti kitu tos pačios gramatinės formos daiktavardžiu ir sakinys lieka gramatiškai taisyklingas. Pavyzdžiui, žodžiai „integralas" ir „virdulys" sukeičiami: sakinyje „sumos integralas lygus integralų sumai" žodį „integralas" pakeitę žodžiu „virdulys", gausime gramatiškai taisyklingą sakinį „sumos virdulys lygus virdulių sumai". Lygiai taip pat sakinyje „virdulys buvo paliktas ant stalo" žodį „virdulys" pakeitę žodžiu „integralas", gausime gramatiškai taisyklingą sakinį „integralas buvo paliktas ant stalo". O štai žodžiai „virdulys" ir „suma" nėra sukeičiami — negalima pasakyti „suma buvo paliktas ant stalo".

Įrodykite, kad žodžių sukeičiamumo sąryšis refleksyvus, simetriškas ir tranzityvus. Suskirstykite į ekvivalentumo klases žodžių aibę:

{dėdė, piemuo, naktibalda, pelė, mama, avis,
strutis, protežė, sesuo, vaidila}.

5. Tvarkos sąryšiai. Žodis „tvarka" dažnai vartojamas pačiuose įvairiausiuose klausimuose. Baigtinės skaitinės aibės elemen-

tus dažnai surašome jų didėjimo tvarka, brolius ir seseris dažniausiai vardijame amžiaus mažėjimo tvarka, aritmetiniai veiksmai atliekami tam tikra tvarka, geriausieji šachmatininkai nurodomi tam tikra tvarka pagal vadinamuosius Elo (amerikiečių profesorius, pasiūlęs koeficientų sistemą, kurioje atsižvelgiama į visus žaidėjų laimėjimus ir nesėkmes) koeficientus, po TSRS pirmenybių visos aukščiausios lygos futbolo komandos išsidėsto tam tikra tvarka ir t. t. Yra numatyta gaminamos detalės operacijų atlikimo tvarka, nustatyta žodžių tvarka sakinyje (pabandykite suvokti, ką reiškia sakinys „ant jis senį sodino kartą arklio ne"!).



46 pav.

Kas yra bendra visais atvejais, kalbant apie tvarką? Kartais manoma, kad tvarka vienareikšmiškai nustato elementų išsidėstymą ir jie vienas po kito eina taip, kaip kareiviai vorele ar kaip natūriniai skaičiai. Tačiau jeigu reikia apskaičiuoti reiškinį $(25-16):3+(31+1)\cdot 4$, tai galima pradėti ir nuo atimties $25-16$, ir nuo sudėties $31+1$. O atlikus dvi operacijas, galima savo nuožiūra arba padalyti 9 iš 3, arba padauginti 32 iš 4. Tačiau iš pradžių padauginti 1 iš 4, o po to pridėti sandaugą prie 31 negalima.

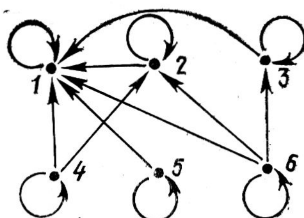
Taigi aritmetikos taisyklės reiškia tik tiek, kad skaičiavimų tvarką galima pavaizduoti 46 paveikslo schema. Jeigu operacijų aibėje apibrėšime sąryšį „pirmesnis už", tai matysime, jog šio pavyzdžio atimtis pirmesnė už dalybą, sudėtis — pirmesnė už daugybą, o dalyba ir daugyba — pirmesnė už antrą sudėtį. Pastebime, kad sąryšis „pirmesnis už" aritmetinių operacijų aibėje turi dvi pagrindines savybes: jis tranzityvus (jeigu operacija x pirmesnė už operaciją y, o operacija y — pirmesnė už operaciją z, tai operacija x pirmesnė už z) ir asimetriškas (nėra tokių operacijų, kad x būtų pirmesnė už y, o y pirmesnė už x).

Su „pirmumo" sąryšiais, pasižyminčiais tokiomis dviem savybėmis, susiduriame labai dažnai — sudarydami detalės apdorojimo technologinį grafą, kurdami naujo techninio įrenginio planą ir t. t. Todėl suformuluosime tokį apibrėžimą: aibės X sąryšis R vadinamas *griežtosios tvarkos sąryšiu,* jeigu jis tranzityvus ir asimetriškas. Lengva įsitikinti, kad tokie sąryšiai, kaip „aukštesnis", „sunkesnis", „tolesnis" ir t. t. yra griežtosios tvarkos sąryšiai.

Lengva patikrinti, kad bet kuris griežtosios tvarkos sąryšis yra antirefleksyvus. Tikrai, juk xRx prieštarautų R asimetriškumui. Be to, pabrėšime, kad sąryšis R^{-1}, atvirkštinis griežtosios tvarkos sąryšiui, taip pat yra to paties tipo sąryšis. Pavyzdžiui,



47 pav.



48 pav.

griežtosios tvarkos sąryšiui „mažiau" realiųjų skaičių aibėje atvirkštinis yra sąryšis „daugiau".

Aibė, kurioje yra apibrėžtas griežtosios tvarkos sąryšis, vadinama *sutvarkyta*. Pavyzdžiui, natūrinių skaičių aibė sutvarkyta sąryšiu „mažiau". Tačiau ta pati aibė sutvarkyta ir kitu sąryšiu — „dalijasi iš ir yra daugiau". Šie tvarkos sąryšiai skiriasi iš esmės. Iš dviejų nelygių natūrinių skaičių m ir n arba bus $m<n$, arba $n<m$. Kitaip tariant, sąryšis „mažiau" natūrinių skaičių aibėje yra jungus. Jis yra jungus ir realiųjų skaičių aibėje. Natūrinių skaičių aibės sąryšio „mažiau" grafą galima pavaizduoti spinduliu (47 pav.). O štai sąryšis „dalijasi iš" nėra jungus; pavyzdžiui, nei 12 nesidalija iš 7, nei 7 nesidalija iš 12. Šio sąryšio grafą galima pavaizduoti tik plokštumoje (48 pav.). Jungiuosius tvarkos sąryšius vadinsime *tiesiniais*.

Realiųjų skaičių aibės sąryšiui „mažiau" priešingas yra sąryšis „ne mažiau". Jis jau nėra griežtosios tvarkos sąryšis, nes nėra asimetriškas. Mat, kai $x=y$, teisinga ir $x\geqslant y$, ir $y\geqslant x$. Kitaip tariant, sąryšis „ne mažiau" yra griežtosios tvarkos sąryšio „daugiau" ir tapatumo sąryšio sąjunga. Tokias sąjungas vadinsime *negriežtosios tvarkos* sąryšiais. Tą patį galima pasakyti kitaip: aibės X sąryšis R yra negriežtosios tvarkos sąryšis, jeigu jis tranzityvus ir antisimetriškas. Kiekvienas negriežtosios tvarkos sąryšis yra refleksyvus.

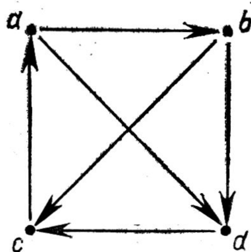
Sąryšis „ne ilgesnė" atkarpų aibėje tranzityvus ir, kaip lengva matyti, refleksyvus. Tačiau jis nėra negriežtosios tvarkos sąryšis, nes pažeista antisimetriškumo sąlyga: jeigu atkarpa x ne ilgesnė už atkarpą y, o atkarpa y — už atkarpą x, tai dar nereiškia, kad tos atkarpos sutampa (jos gali būti skirtingos, tik būti to paties ilgio). Refleksyvūs ir tranzityvūs sąryšiai vadinami *kvazitvarkos sąryšiais.*

Jeigu R — kvazitvarkos sąryšis, tai $R\cap R^{-1}$ — ekvivalentumo sąryšis. Ekvivalentumo klasių aibę pažymėkime Y. Galima įrodyti, kad R apibrėžia negriežtosios tvarkos sąryšį aibėje Y. Ką tik išnagrinėtame pavyzdyje Y sudaro vienodo ilgio atkarpų klasės.

Pratimai

148. 49 paveiksle pavaizduotas skaičių aibės sąryšio „daugiau" grafas. Ar teisingai jis sudarytas?

149. Ar sąryšis „kalnas x yra ne aukštesnis už kalną y" yra tvarkos sąryšis?



49 pav.

150. Sakinyje „Petras išsprendė sunkų ir įdomų matematikos uždavinį“ išveskite rodyklę iš kiekvieno žodžio į jo valdomą žodį (ar žodžius). Gautąjį sąryšį papildykite iki griežtosios tvarkos sąryšio.

151. Sakinyje

„Kai devintą sykį saulė nusileis, jūs prie jūros grįšit tais pačiais takais“ išveskite rodyklę iš kiekvieno žodžio į su juo suderintą žodį. Kokį gavote sąryšį: tvarkos ar ekvivalentumo?

152. Kurie 113 pratime išvardyti sąryšiai yra griežtosios tvarkos sąryšiai, kurie — negriežtosios tvarkos sąryšiai, kurie iš jų tiesiniai, o kurie netiesiniai? Ar yra tarp jų kvazitvarkos sąryšių?

153. Ar geometrinių figūrų aibės sąryšis „būti viduje“ yra tvarkos sąryšis?

154. Kiek skirtingų prasmingų sakinių galima sudaryti, keičiant žodžių tvarką sakinyje „Jis ne kartą sodino senį ant arklio“?

6. Panašumo sąryšiai. Dvi naujos tos pačios markės, tų pačių metų laidos ir tos pačios spalvos automašinos visiškai gali pakeisti viena kitą. Tačiau iš tokių pat dviejų, tik skirtingos spalvos ir panašių viena į kitą mašinų pirkėjas gali mieliau pirkti vieną, o ne kitą. Dar mažiau panašios tos pačios markės, bet skirtingų metų laidos automašinos, o štai lengvoji mašina ir savivartis sunkvežimis panašūs jau tik bendra struktūra (abiejose mašinose yra variklis, ratai, važiuoklė, vairas, stabdis ir t. t.), bet pažiūrėti visai nepanašios viena į kitą.

Kiekvienas daiktas panašus į jį patį, o jeigu daiktas x panašus į daiktą y, tai ir daiktas y panašus į daiktą x. Tačiau kai daiktas x panašus į y, o y panašus į z, vargu ar galima be išlygų spręsti apie x panašumą į z. Yra žinomos karikatūrų serijos, kuriose bet kurių dviejų gretimų piešinių beveik negalima atskirti vieno nuo kito, o galų gale žmogaus veidas virsta, sakysime, kriauše. Taigi panašumo sąryšis turi tik refleksyvumo ir simetriškumo savybes, o tranzityviu jo laikyti negalima.

Suformuluosime tokį apibrėžimą:

A p i b r ė ž i m a s. *Aibės X sąryšis R vadinamas panašumo sąryšiu, kai jis refleksyvus ir simetriškas.*

Matematikoje vietoj „panašumo sąryšis“ dažniau sakoma „tolerantiškumo sąryšis“, bet čia vartosime paprastesnį lietuvišką pavadinimą.

Pateiksime panašumo sąryšių pavyzdžių.

1. Du žodžius vadinkime panašiais, jeigu jie sudaryti iš vienodo raidžių skaičiaus, ir arba sutampa, arba skiriasi tik viena

raide. Pavyzdžiui, žodžiai „kasa“ ir „rasa“ yra panašūs, kaip ir žodžiai „rasa“ ir „rasė“. Bet žodžiai „kasa“ ir „rasė“ nėra panašūs, nes skiriasi dviem raidėmis. Vis dėlto pereinant nuo vieno žodžio prie kito, panašaus į jį žodžio, galima „juodą paversti baltu“. Štai viena iš galimybių:

juodas — kuodas — kurdas — kardas —
kartas — kaltas — baltas.

2. Sąryšis „būti draugu“ žmonių aibėje taip pat yra panašumo sąryšis (žinoma, jeigu tarsime, kad kiekvienas žmogus pats sau draugas). Jis refleksyvus ir simetriškas, bet nėra tranzityvus (ne kiekvienas mano draugo draugas draugauja su manimi).

3. Kiekvienas matavimas atliekamas tam tikru tikslumu ε. Du dydžius vadinkime ε-panašiais, jeigu jie vienas nuo kito skiriasi mažiau negu ε. Matuojant ε tikslumu, neįmanoma atskirti dviejų ε-panašių dydžių. Tačiau jeigu x ε-panašus į y, o y ε-panašus į z, tai x ir z tėra tik 2ε-panašūs. Todėl dydžių ε-panašumo sąryšis tėra tik refleksyvus ir simetriškas, bet nėra tranzityvus.

4. Dvi tai pačiai briaunai priklausančias briaunainio viršūnes vadinkime panašiomis (taigi ir tada, kai jos sutampa). Tai taip pat panašumo sąryšis.

5. Panašumo sąryšis yra ir lietimo sąryšis apskritimų aibėje (jeigu tarsime, kad kiekvienas apskritimas liečia save patį).

6. Dviejų lietuviškų žodžių priklausymas tai pačiai kalbos daliai iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti ekvivalentumo sąryšiu. Žodžius skirstome į daiktavardžius, būdvardžius, veiksmažodžius, įvardžius, skaitvardžius, dalyvius, padalyvius, pusdalyvius, būdinius, siekinius, prielinksnius, jungtukus, prieveiksmius, dalelytes, ištiktukus, jaustukus. Tačiau, pavyzdžiui, žodį „arti“ galima perskaityti ir kaip veiksmažodį (arti lauką), ir kaip prieveiksmį (namai jau arti). Todėl sąryšis „priklausyti tai pačiai kalbos daliai“ yra tik panašumo sąryšis (žodžiai „eiti“ ir „arti“ priklauso tai pačiai kalbos daliai, lygiai kaip ir žodžiai „arti“ ir toli“, bet žodžiai „eiti“ ir „toli“ priklauso skirtingoms kalbos dalims).

Pastebėsime, kad įvairių kalbos dalių aibės beveik nepersidengia viena su kita, todėl, išmetus iš kalbos visai nedaug žodžių, būtų galima priklausymo vienai kalbos daliai sąryšį paversti ekvivalentumo sąryšiu. Tačiau natūralioje kalboje tai vis dėlto tik panašumo sąryšis.

Norint duotoje aibėje apibrėžti panašumo sąryšį, užtenka sudaryti keletą netuščių jos poaibių $A_1, \ldots, A_n$, kurie dengia visą aibę X (t. y. tokių, kad X yra tų aibių sąjunga), ir elementus x ir y pavadinti panašiais, jeigu jie priklauso tam pačiam poaibiui. Tas sąryšis neabejotinai refleksyvus ir simetriškas, bet tranzityvus jis bus tik tada, kai skirtingi poaibiai A_i ir A_k neturės bendrų elementų.

Pratimai

155. Kurie iš 113 ir 114 pratimo sąryšių yra panašumo, bet ne ekvivalentumo sąryšiai?

7. Binarieji sąryšiai ir lingvistika. Išdėstytoji binariųjų sąryšių teorija gali iš pirmo žvilgsnio atrodyti labai abstrakčia matematikos sritimi, kurią vargu ar galima kur nors taikyti. Žinoma, binariųjų sąryšių teorijos pritaikymo vertės negalima lyginti, sakysime, su funkcijų teorijos nauda. Dydžių funkcinės priklausomybės vaidina lemiamą vaidmenį įvairiausiose mokslo ir technikos srityse — beveik visi fizikos dėsniai formuluojami funkcijų kalba, nes juose kalbama apie tai, kaip, žinant vieno dydžio reikšmę, rasti kito dydžio reikšmę; tai įmanoma padaryti tik tada, kai tuos dydžius sieja funkcinė priklausomybė. Be to, su skaitinėmis funkcijomis galima atlikinėti aritmetines operacijas, jas galima diferencijuoti, integruoti ir t. t.

Skaičių binariųjų sąryšių negalima sudėti ar sudauginti, jų negalima diferencijuoti ar integruoti, o žinant binariojo sąryšio vieno dydžio reikšmę negalima rasti kito dydžio — galima rasti tik visą antrojo dydžio reikšmių aibę. Todėl, taikant matematiką fizikoje ar technikoje, binariųjų sąryšių teorija nevaidina kokio nors svarbesnio vaidmens (išskyrus galbūt nelygumo sąryšį, taikomą įvertinant dydžius). Tačiau paskutiniaisiais dešimtmečiais matematiniai metodai ėmė skverbtis į lingvistiką, sociologiją, psichologiją, istoriją, biologiją, t. y. į tokius mokslus, kuriuose anksčiau jų pritaikyti nepavykdavo. Be to, šalia kiekybinių tyrinėjimų (pavyzdžiui, kaip dažnai vieni ar kiti žodžiai pasitaiko kalboje) matematinius metodus pradėta taikyti kokybiniams, struktūriniams tyrinėjimams. Kalbos, psichologijos ir panašių mokslų struktūrinių dėsningumų neįmanoma išreikšti skaičiais, juose svarbu įvairių aibių elementų sąryšiai (pavyzdžiui, žodžių derinimas, pojūčių sąveika ir t. t.). Išdėstytoji binariųjų sąryšių teorija kaip tik ir yra patogus matematinis aparatas tokiems tyrinėjimams. Šiek tiek panagrinėsime, kaip binariųjų sąryšių teorija taikoma lingvistikoje.

Tarp tam tikro sakinio žodžių (jeigu tas pats žodis įeina kelis kartus, tai tarp įeičių) galima nustatyti įvairius sąryšius.

1. Paprasčiausias tokių sąryšių yra pirmumo sąryšis „žodis x sakinyje yra pirmesnis už žodį y“. Jis nusako žodžių įeičių į duotąjį sakinį aibės tiesinę tvarką. Lietuvių kalboje tas sąryšis pakankamai svarbus (žodžiai sakinyje turi eiti tam tikra tvarka, kitaip jo nebus galima suprasti), bet jis dar svarbesnis tokiose kalbose, kaip anglų. Mat, lietuvių kalboje yra pakankamai turtinga galūnių sistema, nurodanti žodžių ryšius sakinyje; anglų kalboje tokios sistemos beveik nėra, o žodžių ryšius nustato jų tvarka sakinyje.

2. Antras svarbus sąryšių tipas — gramatinis valdymas. Pavyzdžiui, iš gramatikos žinome, kad prielinksnis „iš" reikalauja kilmininko, prielinksnis „pas" — galininko ir t. t. Taigi prielinksniai valdo daiktavardžių linksnius. Šiek tiek supaprastinant galima tarti, kad lietuvių kalboje pažymimasis žodis valdo pažyminį, tarinys — veiksnį, prielinksnis — daiktavardį, veiksmažodis — tiesioginį papildinį, veiksmažodis — prielinksnį. Bendresnis negu valdymas būtų vadovavimo — daugiaetapio valdymo — sąryšis (žodis x vadovauja žodžiui z, jeigu yra tokie žodžiai $y_1, \ldots, y_n$, kad x valdo y_1, y_1 valdo $y_2, \ldots, y_n$ valdo z).

3. Trečias sąryšių tarp žodžių įeičių į sakinį tipas yra derinimas, t. y. buvimas ryškiai išreikštų bendrų gramatinių požymių, jungiančių duotuosius žodžius į junginį. Pavyzdžiui, būdvardis ir daiktavardis derinami gimine, skaičiumi ir linksniu.

4. Ketvirtasis tipas yra vienarūšiškumo sąryšis —„būti vienarūšėmis sakinio dalimis". Tipiškas yra pavyzdys: „Švedas, rusas — duria, kerta, pjauna" (A. Puškinas. Poltava). Šiame sakinyje yra du vienarūšiai veiksniai ir trys vienarūšiai tariniai.

5. Penktas sąryšių tipas susijęs su sakinių skirstymu į tokius žodžių junginius, kai smulkesni junginiai įeina į stambesnius. Pavyzdžiui, sakinyje „Aukštas medinis namas stovėjo tankiame žaliame miške" galima išskirti žodžių junginius „aukštas medinis namas" ir „tankiame žaliame miške". Mažiausias junginys yra atskira žodžio įeitis, o didžiausias — visas sakinys. Nubraižyto sąryšio „įeiti į komponentę" grafas būtų medis, kuris ryškiai šakotųsi į dešinę. Čia atsispindi kalbinė taisyklė, siejanti žodžių tvarką sakinyje su loginiu minties plėtojimu.

Šių ir kitų sąryšių nagrinėjimas matematiniais metodais yra viena iš matematinės lingvistikos sričių. Paaiškėjo, kad gautais rezultatais remiamasi, tiriant dirbtines kalbas, taip pat ir algoritmines kalbas, kuriomis rašomos skaičiavimo mašinų programos. Nurodysime kelias išvardytų sąryšių savybes.

1. Kaip jau buvo sakyta, pirmumo sąryšis yra žodžių įeičių į sakinį aibės griežta tiesinė tvarka.

2. Valdymo sąryšis daugiausia antitranzityvus (jeigu x valdo y, o y valdo z, tai x vadovauja, bet ne valdo z); be to, yra vienintelis „pradinis elementas", kurio nevaldo nė vienas žodis (dažniausiai tai sakinio tarinys); pagaliau nė vieno žodžio nevaldo daugiau kaip vienas žodis. Todėl valdymo sąryšio grafas yra medis su viena šaknimi. Beje, retkarčiais tos savybės pažeidžiamos (pavyzdžiui, kai sakinyje yra keli vienarūšiai tariniai).

3. Žodžių derinimo sąryšis simetriškas ir refleksyvus (analogiškai lygiagretumui kiekvieną žodį laikome suderintu su pačiu savimi). Tačiau jis, apskritai kalbant, nėra tranzityvus, nes žodis x gali būti suderintas su žodžiu y skaičiumi, o su žodžiu z gimine; tada žodžiai y ir z nebūtinai bus suderinti vienas su kitu. Taigi žodžių derinimas yra panašumo sąryšis.

4. Vienarūšiškumo sąryšis yra ekvivalentumas.

5. Įdomiomis savybėmis pasižymi įėjimo į komponentes sąryšis. Pirma, jeigu sakinyje yra daugiau kaip vienas žodis, tai kiekvienam x galima rasti tokį y, kad arba $x \subset y$, arba $y \subset x$. Yra didžiausias elementas (visas sakinys), kuris neįeina į jokią komponentę. Komponentės negali dalinai kirstis, todėl jeigu $x \subset y$, ir $x \subset z$, tai arba $y \subset z$, arba $z \subset y$. Pagaliau įėjimo į komponentes sąryšis yra griežtoji, bet ne tiesinė tvarka.

Trumpiau sakoma, kad įėjimo į komponentes sąryšis yra mediška tvarka. Šis faktas yra daugelio matematinės lingvistikos konstrukcijų pagrindas (pavyzdžiui, N. Chomskio generatyviųjų gramatikų teorijoje).

Sudėtingesni ryšiai tarp sakinio žodžių sąryšių skirtingų tipų. Apie juos, kaip ir apie kitokį binariųjų sąryšių teorijos taikymą lingvistikoje, galima pasiskaityti J. Šreiderio knygoje „Lygumas, panašumas, tvarka“ [1].

Baigdami pateiksime pavyzdį, kaip sąryšių teorija taikoma iššifruoti tekstams (toks uždavinys buvo pateiktas Antrojoje tradicinėje kalbotyros ir matematikos olimpiadoje Maskvos M. Lomonosovo valstybinio universiteto Filologijos fakultete).

„Aibę M_{ar} sudaro dešimt arabiškų žodžių, parašytų lotyniška transkripcija:

M_{ar} = {miγzal, ma'bud, mahzan, ma'mil, mirgab, ma'bar, maγzul, ma'bad, mi'bar, ma'mal} (čia ženklai ' ir γ žymi specifines arabų kalbos priebalses), o aibę M_{lie} — jų lietuviški atitikmenys: M_{lie} = {dievaitis, darbininkas, perkėla, sandėlis, verpalai, keltas, gamykla, verpstė, šventykla, teleskopas}. Reikia kiekvienam arabiškam žodžiui nurodyti jo lietuvišką atitikmenį“.

Pastebime, kad aibėje M_{lie} yra du prasminiai sąryšiai — R_1: „liesti tą pačią veiklos sritį“ ir R_2: „turėti tą patį santykį su veikla“. Abu šie sąryšiai yra ekvivalentumai ir suskaido aibę M_{lie} į klases — pagal R_1: {verpstė, verpalai}, {teleskopas}, {keltas, perkėla}, {dievaitis, šventykla}, {sandėlis}, {darbininkas, gamykla}; pagal R_2: {verpstė, teleskopas, keltas} — veiklos įrankis, {verpalai, dievaitis} — objektas, į kurį nukreiptas veiksmas, {perkėla, šventykla, sandėlis, gamykla} — veiksmo vieta, {darbininkas} — veikiantis subjektas.

Tarp arabiškų žodžių yra du sąryšiai — Q_1: „turėti vienodą priebalsių struktūrą“ ir Q_2: „turėti vienodą balsių struktūrą“. Šie sąryšiai taip pat yra ekvivalentumai. Juos atitinka tokie aibės M_{ar} skaidiniai į klases — pagal Q_1: {miγzal, maγzul}, {mirgab}, {mi'bar, ma'bar}, {ma'bud, ma'bad}, {mahzan}, {ma'mal, ma'mil}; pagal Q_2: {miγzal, mirgab, mi'bar}, {maγzul, ma'bud}, {ma'bar, ma'bad, mahzan, ma'mal}, {ma'mil}.

Jeigu aibių M_{lie} ir M_{ar} skaidiniuose palyginsime klasių skaičių, pamatysime, kad priebalsių struktūra apibūdina veiklos sritį, o bal-

[1] Ю. А. Шрайдер, «Равенство, сходство, порядок» (М., 1971).

sių struktūra — santykį su veikla. Nesunkiai sudarome tokias lenteles:

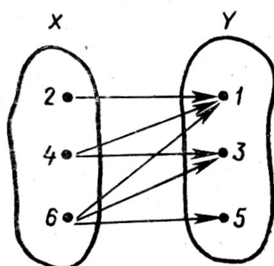
Santykis / Sritis	Instrumentas	Objektas	Vieta	Subjektas
verpimas	verpstė	verpalai		
astronomija	teleskopas		(observatorija)	(astronomas)
perkėlimas	keltas		perkėla	
kultas		dievaitis	šventykla	(žynys)
saugojimas			sandėlis	
gamyba			gamykla	darbininkas

Balsės / Priebalsės	ia	au	aa	ai
mγzl	*mizal*	*magzul*		
mrgb	*mirgab*		*(margab)*	*(margib)*
m'br	*mi'bar*		*ma'bar*	
m'bd		*ma'bud*	*ma'bad*	*ma'bid*
mhzn			*mahzan*	
m'ml			*ma'mal*	*(ma'bid)*

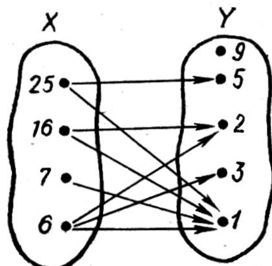
Žodžiai, užimantys tą pačią padėtį, yra vienas kito atitikmenys. Skliausteliuose parašyti žodžiai nepaminėti užduotyje, bet juos būtų galima išversti, remiantis pastebėtais dėsningumais.

8. Istorinės žinios. Įvairių objektų sąryšio sąvokos ištakas galima pastebėti jau Aristotelio ištobulintoje senovės graikų logikoje. Jį matematine sąvoka pavertė XIX a. anglų logikas ir matematikas Bulis (žinomos rašytojos E. Voinič, knygos „Gylys" autorės, tėvas), amerikiečių matematikas Pirsas, vokiečių logikas Šrederis ir italų matematikas Peanas.

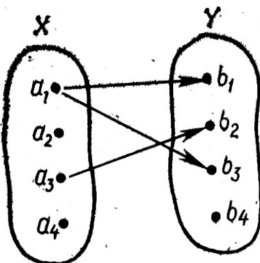
1. a) Žmogus *a* gimė mieste *b* ir t. t.; c) trikampio *a* plotas lygus skaičiui *b*; d) trikampis *a* apibrėžtas apie apskritimą *b*. **2.** Žr. 50 pav. **3.** Atitikčių ženklai: a), b), c), d), e), g), i), j), l) p,) r), t); veiksmų ženklai: f), h), k), m), n), o). **4.** Grafikas: {(25, 5), (25, 1), (16, 2), (16, 1) (7, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 1)}. Grafas 51 paveiksle. **5.** {(tėtė, ė), (tėtė, t), (dėdė, ė), (dėdė, d), (dėlė, ė), (dėlė, d), (dėlė, l), (odė, ė), (odė, d), (odė, o)}. **6.** $\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_2)\}$; $\{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$. Grafai 52a ir 52b paveiksluose. **7.** Nugalėtojas Kiškis, paskutinėje vietoje Paberžis. {(Montrimas, Augulis), (Montrimas, Kiškis), (Pocius, Orentas), (Pocius, Paberžis), (Orentas, Pocius), (Augulis, Montrimas), (Augulis, Paberžis), (Paberžis, Pocius), (Paberžis, Augulis), (Kiškis, Montrimas)}. **8.** {(Inčiūra, *b*), (Lapėnas, *a*), (Klimas, *c*), (Trumpa, *b*), (Augonis, *c*), (Slapšys, *b*)}. Viename name su Inčiūra gyvena Trumpa ir Slapšys. **9.** X ir Y atitikties „įbrėžtas į" grafikas: $\{(x_1, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_5), (x_4, y_5)\}$; Y ir X atitikties „įbrėžtas į" grafikas: $\{(y_1, x_1), (y_6, x_5)\}$; Y ir X atitikties „apibrėžtas apie" grafikas: $\{(y_2, x_1), (y_4, x_2), (y_5, x_3), (y_5, x_4)\}$. **10.** {(*a*, 10), (*b*, 8), (*c*, 10), (*d*, 12), (*e*, 10), (*f*, 4)}. **12.** „pamokos" — vienask. kilm., daugisk. vard. ir šauksm.; „stale" — vienask. viet. ir šauksm.; „broliai" — daugisk. vard. ir šauksm.; „rankove" — vienask. įnag. ir šauksm.; „tų" — vyr. ir mot. gim. daugisk. kilm.; „burna" — vienask. vard., įnagin. ir
ženklai: a), b), c), d), e), g), i), j), l) p,) r), t); veiksmų ženklai: f), h), k),
„gerų" — vyr. ir mot. gim. daugisk. kilm.; „dviem" — naud. ir įnagin.; „vienuolika" — vard., gal., įnagin. ir šauksm.; „sūnus" — vienask. vard., daugisk. galin.; „avis" — vienask. vard., daugisk. gal. **14.** Žr. 53 pav. **15.** Žr. 54 pav. **17.** Žr. 55 pav. **18.** {(1; −1), (1; 0), (2; 1), (2; 2), (3; 2), (5; 0), (5; 2)}. **19.** $R(4) =$



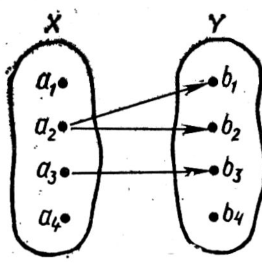
50 pav.



51 pav.

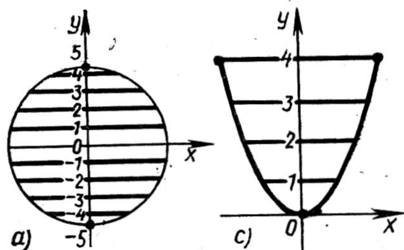


a)

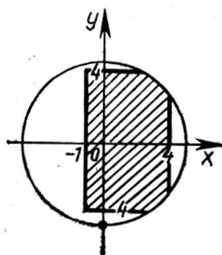


b)

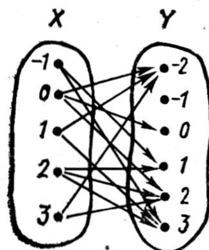
52 pav.



53 pav.

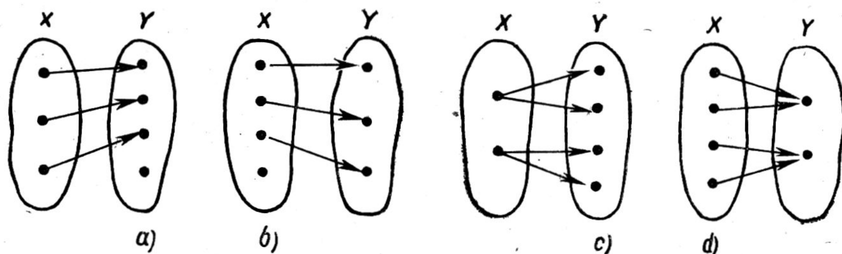


54 pav.

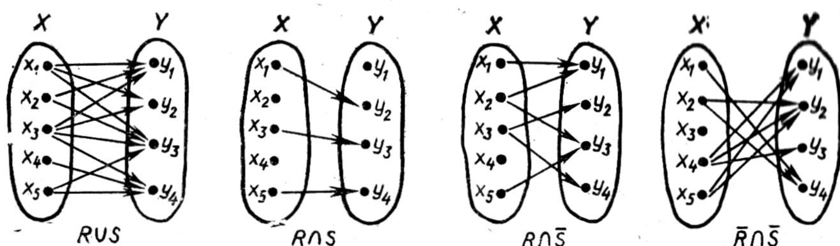


55 pav.

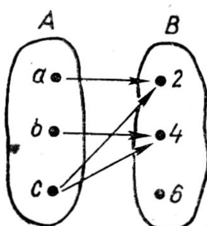
$= \{1;\ 3\}$, $R^{-1}(5) = \{6\}$. **20.** $R(6) = \{1, 2, 3\}$, $R^{-1}(2) = \{16, 6\}$, $R^{-1}(9) = \varnothing$, $R^{-1}(1) = X$. Apibrėžimo sritis sutampa su X, reikšmių aibė: $\{5, 2, 3, 1\}$. **21.** R(dėdė) = {d, ė}, R^{-1}(d) = {dėdė, dėlė, odė}, R^{-1}(k) = ∅. **22.** Name d negyvena žmonės iš X; Banys negyvena nė viename iš namų a, b, c, d. **23.** Aibė mokinių, sėdinčių tame suole; aibė suolų, kuriuose sėdi bent vienas mokinys. **24.** Tuščiasis pirmvaizdis — Kiškio. **25.** Aibė visų trikampių, įbrėžtų į tą apskritimą; iš vieno (trikampis įbrėžtas tik į vieną apskritimą). **26.** Keturkampių, kurių priešingųjų kampų didumų sumą lygi 180°. **27.** Teigiamųjų skaičių aibė. **28.** Žr. 56 pav. **29.** Visur apibrėžtos a), b), d); siurjektyvios b), c), d); funkcinės b), c); injektyvios a), b); bijektyvi b). **30.** a) Taip, b) taip, c) taip, d) ne; R ir R atitiktis visur apibrėžta, funkcinė; R_0 ir R_0 atitiktis bijektyvi. **31.** Skaičiaus 0 pilnąjį pirmvaizdį sudaro skaičiai, kurie dalijasi iš 3; ši atitiktis neinjektyvi. **32.** Siurjektyvi, visur apibrėžta. Jeigu X — pirminių skaičių aibė, tai bijektyvi (pirminis skaičius dalijasi tik iš savęs, nes 1 į aibę X neįeina). **33.** Visur apibrėžta. $R(X)$ = {A, M, K, V, S, O, T, J}. $R^{-1}(A)$ = {Andrius, Arūnas}. Tušti pavyzdžiui, raidžių Ę, Į, Ų pilnieji pirmavaizdžiai. **34.** $(a, 1) \leftrightarrow (1, a)$ ir t. t. **35.** Neinjektyvi. Pakeitus X aibe Z — injektyvi. **36.** Taip. **37.** Funkcinė, visur apibrėžta, siurjektyvi. Apskritimo vaizdas — atkarpa $[-5, 5]$. Atkarpos $[-5, 5]$ pilnasis pirmvaizdis — juosta, lygiagreti ordinačių ašiai. **38.** Apibrėžta ne visur (pavyzdžiui, ė, i, u nestovi tiesiog prieš priebalsius), injektyvi. $R(X)$ = {b, f, j, o, v}. **39.** Jeigu $X = Y = N$, tai injektyvi. **40.** Ne, taip. **42.** Taip, taip, taip. **43.** Taip, ne, ne. **44.** Taip. **45.** Ne, taip. **48.** Ne. **49.** Ne, taip. **50.** Ne. **51.** Ne, ne, taip. **52.** „Tiesė yra parabolės simetrijos ašis“. Visur apibrėžta, injektyvi, siurjektyvi. **53.** Žr. 57 pav. **54.** Žr. 58 pav. **55.** Kvadrato x perimetras lygus skaičiui y. **57.** $A \cup \{1\}$. **58.** „$x - y$ duktė“. Jeigu $a \in A$, tai a yra x motina. **59.** $R^{-1}(b) = \{2, 3\}$. **60.** $R^{-1}(a) = \{1, 3, 5\}$. **61.** Atvirkštinė: „skaičius y — daugiakampio x plotas“, priešingoji: „daugiakampio x plotas nelygus skaičiui y“, atvirkštinė priešingajai: „skaičius y nelygus daugiakampio x plotui“. **62.** Pavaizduoti visas rodykles, kurios neįeina į R grafą, po to pakeisti jų kryptį. **63.** „Daugianaris y



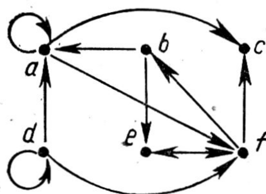
56 pav.



57 pav.

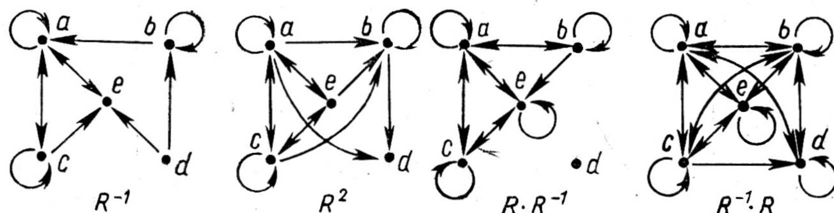


58 pav.

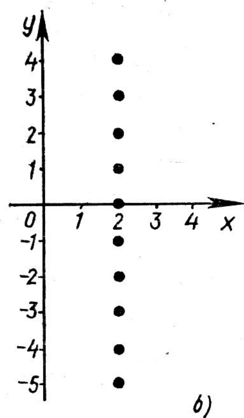


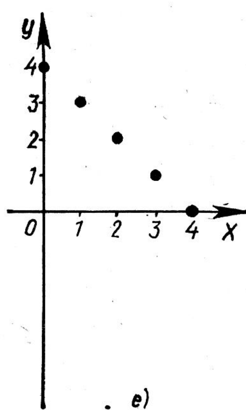
59 pav.

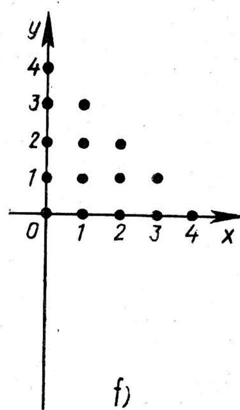
turi šaknį x". **64**. „Knygą y skaitė žmogus x", „žmogus x neskaitė knygos y". **70**. Pirmuoju atveju neatvirkštinė (x ir y gali būti broliais), antruoju atveju — atvirkštinė. **72**. $(RS)(a)=\{x, z, y, u\}$, $(RS)^{-1}(z)=\{a, b, c, d\}$. **73**. „Taškas x — įbrėžto į trikampį z apskritimo centras". **74**. „Skaičius x — apibrėžto apie apskritimą z trikampio plotas", $(RS)^{-1}(z)=[3r^2\sqrt{3}, +\infty[$. **75**. Atitikties RS grafikas: $\{(x_1, z_1), (x_2, z_1), (x_2, z_2), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_3, z_3)\}$. **76**. $\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, b), (d, a), (d, c), (e, e)\}$. **77**. Žr. 59 pav. **78**. a, b, d — vyrai; c, e, g — moterys. **79**. f, h, i — moterys. **80**. a) grafas — sąryšio „būti seneliu" (žmogus negali turėti dviejų tėvų). **82**. Apibrėžimo sritis - aibė vyrų, turinčių vaikų; reikšmių aibė — visų žmonių aibė. „Būti tėvu" siurjektyvus ir injektyvus, bet nefunkcinis ir ne visur apibrėžtas. **83**. a) $T\subset M$ (tėvas negali būti motina), $T\cup M=Va^{-1}$ (jeigu y yra x vaikas, tai x yra y tėvas arba motina), $Se\subset Va\cdot Va^{-1}$ (jeigu x yra z sesuo, tai x yra y vaikas, taip pat ir z yra y vaikas), $T\subset Va$, $B\subset Se$, $B^{-1}=B\cup Se$, $Vy\cap Z=\varnothing$, $T\cap M=\varnothing$, $Va=Sū\cup D$, $Sū\cap D=\varnothing$. b) „Būti seneliu"$=T\cdot T\cup T\cdot M$, „būti sūnėnu"$=Sū\cdot B\cup Sū\cdot Se$ ir t. t. c) Vy^{-1} — žmona, $Vy\cup Ž$ — sutuoktiniai, $T\cup M$ — gimdytojai, $B\cdot T$ ir $B\cdot M$ — dėdė, $M\cdot B$ — motina, $M\cdot M$ — senelė, $M\cdot Va^{-1}$ — senelė, $Se\cdot Va^{-1}$ — teta. **84**. a). **85**. Apibrėžimo sritis — R, reikšmių aibė — spindulys $[l, +\infty[$. **86**. a). **87**. a) $[-4, 4]$; b) $[10, +\infty[$. **89**. Žr. 60 pav.



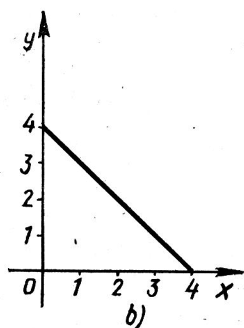
60 pav.

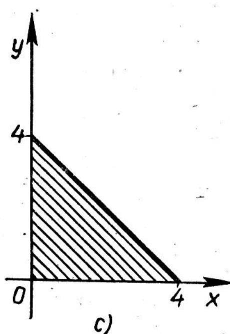


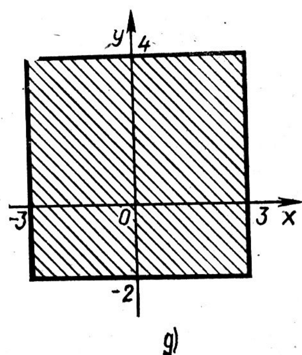




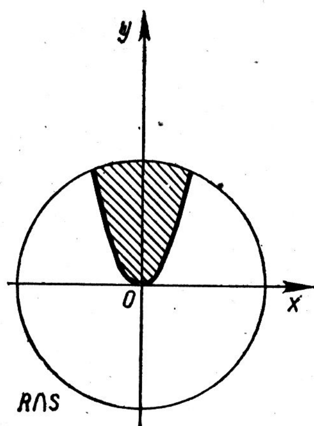
61 pav.



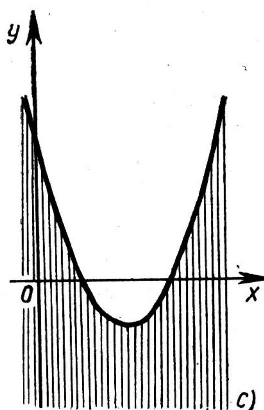


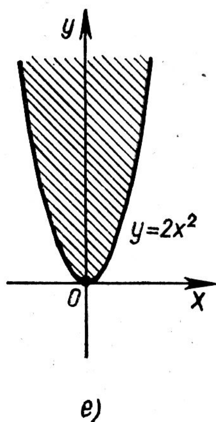


62 pav.



63 pav.





64 pav.

92. b) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (5, 1), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$; c) $\{(2, 1), (6, 3)\}$. **94.** $R^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4, 6, 8\}$. **95.** Atvirkštinis „daugiau", priešingasis „ne mažiau". **97.** Žr. 61 pav. **98.** Žr. 62 pav. **99.** Atvirkštinis $x \leqslant \sqrt{|y|}$, priešingasis $y < x^2$. **100.** Apibrėžimo sritis sutampa su reikšmių aibe: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **101.** Taškai $A(-1; -3)$, $B(0; 0)$, $C(1; 3)$. **102.** RR^{-1} grafiką sudaro visos 16 žodžių porų: {(dėdė, dėdė), (dėdė, tėtė), ..., (odė, odė)}. $R^{-1}R$ grafiką sudaro raidžių poros {(d, d), (d, ė), (d, l), (d, o), (ė, d), (ė, ė), (ė, l), (ė, t), (ė, o), (l, d), (l, ė), (l, l), (t, ė), (t, t), (o, d), (o, ė), (o, o)}. **103.** Žr. 63 pav. **105.** Žr. 64 pav. **106.** a) $A(2; 7)$, $B(7; 2)$; b) $A(12; 5)$; $B(-12; 5)$, $C(12; -5)$, $D(-12; -5)$; c) $A(2; 5)$, $B(-2; -5)$, $C(5; 2)$, $D(-5; -2)$. **107.** a) $(1, -7)$, $(5, 5)$, $(-7, 1)$; b) $(-7, 1)$. **108.** Lygūs. **112.** Refleksyvus, antisimetriškas, tranzityvus. **113.** a), b), c), e), l), ž) refleksyvus, simetriškas, tranzityvus, d) antirefleksyvus, antitranzityvus, simetriškas, f) refleksyvus, simetriškas, g) simetriškas, h), t), u) antirefleksyvus, simetriškas, tranzityvus, jungus, i) refleksyvus, antisimetriškas, tranzityvus, k) simetriškas, m) refleksyvus, simetriškas, n) refleksyvus, simetriškas, o) antirefleksyvus, asimetriškas, p) antirefleksyvus, simetriškas, r) antirefleksyvus, tranzityvus, s) antirefleksyvus, v) antirefleksyvus, simetriškas, z) refleksiškas, simetriškas. **118.** Kad gautume refleksyviojo sąryšio grafą, reikia prijungti kilpas taškuose b ir d; kad gautume simetrinio sąryšio grafą, reikia viengubas rodykles pakeisti dvigubomis; kad gautume tranzityviojo sąryšio grafą, reikia pridėti rodykles (b, a), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c). **125.** Neteisingas. **126.** Ne. **127.** a), b), c), e), l), ž). **128.** Taip. **129.** Turėti vienodus pažymius iš geometrijos, tą pačią gimimo dieną ir t. t. **130.** Ne, nes yra mokinių, nelankančių sekcijų. **131.** a), b). **133.** Ne, nes lygiakraščiai sudaro lygiašonių aibės poaibį. **134.** Ne (praleistas nulis). **135.** Ne, nes statmenos tiesės — kertančiųjų poaibis. **136.** Į klases skaičių, kai gaunamos liekanos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. **137.** Į bendramokslių aibes (du mokiniai čia vadinami bendramoksliais, jeigu jie mokosi toje pačioje mokykloje). **138.** Ne. **139.** Ne, reikia pridėti klasę apskritimų, neturinčių su juo nė vieno bendro taško (tariame, kad apskritimas liečiasi pats). **140.** Daiktavardžiai, būdvardžiai, įvardžiai, skaitvardžiai, veiksmažodžiai, dalyviai, padalyviai, pusdalyviai, būdiniai, siekiniai, prielinksniai, jungtukai, prieveiksmiai, dalelytės, ištiktukai, jaustukai. **141.** Veiksniai, tariniai, pažyminiai, papildiniai, vietos aplinkybės ir t. t., tarnybiniai žodeliai. **142.** Vandenynai, jūros, ežerai, tvenkiniai. **144.** Taip. **145.** Į tarpusavy lygiagrečių tiesių klases. **146.** Į koncentrinių apskritimų klases. **148.** Ne. **149.** Ne, nes du kalnai gali turėti tą patį aukštį. **151.** Tai ekvivalentumo sąryšis. **152.** Griežtosios tvarkos: h), t), u); negriežtosios tvarkos: i), j); tiesinės tvarkos: h), i), t), u). **153.** Taip.

TURINYS

Igoris Nikolajevičius Antipovas, Naumas Jakovlevičius Vilenkinas, Olegas Sergejevičius Ivaševas-Musatovas, Aleksandras Grigorjevičius Mordkovičius
RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI
Fakultatyvinis kursas IX—X kl.
Sudarė *O. Bokovnevas, V. Firsovas, S. Švarcburdas*

Redaktorė *I. Šiugždinienė*
Viršelis *P. Markevičiaus*. Men. redaktorė *Ž. Šalienė*
Techn. redaktorė *N. Kasenkovienė*. Korektorė *J. Grybinaitė*
Vertimą recenzavo *Petras Rumšas*

Игорь Николаевич Антипов, Наум Яковлевич Виленкин, Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов, Александр Григорьевич Мордкович
ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ
Факультативный курс, IX—X кл.
Составители: *О. А. Боковнев, В. В. Фирсов, С. И. Шварцбурд*
Перевел с русского *Юозас Мачис*
Оригинал рекомендован Главным управлением школ Министерства просвещения СССР
На литовском языке
Литовская ССР, 233000, Каунас, пр. Ленина, 25, издательство «Швиеса»

ИБ № 1388
Duota rinkti 1982.08.09. Pasirašyta spausdinti 1982.12.14. Formatas 60×90¹/₁₆, popierius spaudos Nr. 3, literatūrinė garnitūra, iškilioji spauda, 1 spalva. 11,5 sąl. sp. lnk., 11,5 leid. lnk. Tiražas 10 000 egz. Užsakymo Nr. 1149. Leid. Nr. 9438.
Kaina 35 kap.

Leidykla „Šviesa", 233000 Kaunas, Lenino pr. 25.
V. Kapsuko-Mickevičiaus spaustuvė, 233000 Kaunas, Lenino pr. 23.